Лекція №6

п. 2.4. Метод Фур'є розв'язування хвильового рівняння.

Сформулюємо остаточно математичну модель задачі, до якої приводить вивчення вільних коливань струни, закріпленої на обох кінцях.

Нехай в положенні рівноваги струна лежить на осі Ox на відрізку $[0; l]$.

Отже, потрібно розв'язати однорідне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \qquad (*)$$

при початкових умовах:

$$\boxed{u(x, 0) = f(x)}, \qquad (1) \qquad\qquad \boxed{u'(x, 0) = F(x)}, \qquad (2)$$

і граничних (крайових) умовах:

$$\boxed{u(0, t) = 0}, \qquad (3) \qquad\qquad \boxed{u(l,\ t) = 0}. \qquad (4)$$

Тут функції $f(x)$ і $F(x)$ - визначені на відрізку $[0;\ l]$ і $f(0) = f(l) = 0$.

Функція $f(x)$ визначає початкову форму струни, а $F(x)$ - початкову швидкість струни.

Озн. Задача розв'язування диференціального рівняння при початкових і граничних умовах називається *мішаною задачею*.

Розглянемо метод Фур'є розв'язування мішаної задачі.

За цим методом знаходять розв'язок рівняння (*) у вигляді добутку двох функцій:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Тоді $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \cdot T''$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T \cdot X''$, $\quad X \cdot T'' = a^2 \cdot T \cdot X''$.

Підставивши в рівняння (*), матимемо: $\quad \dfrac{T''}{a^2 \cdot T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$, де $\lambda > 0$.

Випадок, коли ці відношення дорівнюють додатному числу, приводить до таких X і T, для яких $u(x, t)$ не може задовольняти граничні умови (3-4).

Розв'яжемо кожне рівняння окремо.

1. $$\begin{aligned} &\frac{X''}{X} = -\lambda, \\ &X'' + \lambda X = 0, \\ &k^2 + \lambda = 0, \\ &k^2 = -\lambda, \\ &k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}, \\ &X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} &\frac{T''}{a^2 \cdot T} = -\lambda, \\ &T'' + a^2\lambda T = 0, \\ &k^2 + a^2\lambda = 0, \\ &k^2 = -a^2\lambda, \\ &k_{1,2} = \pm ia\sqrt{\lambda}, \\ &T = D_1 \cos a\sqrt{\lambda}t + D_2 \sin a\sqrt{\lambda}t. \end{aligned}$$

Будемо вимагати виконання граничних умов:

(3) $u(0, t) = 0 \ \Rightarrow C_1 \cdot T = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, оскільки $T \neq 0$.

(4) $u(l, t) = 0 \ \Rightarrow C_2 \sin\sqrt{\lambda}l \cdot T = 0, \quad C_2 \neq 0$, бо інакше $u(x, t) = 0$.

Тоді $\sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot l\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \cdot l = n\pi, \quad \sqrt{\lambda} = \dfrac{n\pi}{l}$. При цьому $n = 1, 2, ..., \quad n \neq 0$, бо інакше $X = 0$.

Тоді маємо в залежності від n нескінченне число розв'язків рівняння (*). Ці розв'язки мають вигляд:

$$u_n(x,\ t) = C_{2n} \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot \left(D_{1n} \cos\frac{an\pi}{l}t + D_{2n} \sin\frac{an\pi}{l}t\right).$$

Відомо, що для лінійного диференціального рівняння сума декількох розв’язків – це розв’язок рівняння. Рівняння (*) є лінійним. Можна довести, що нескінченна сума розв’язків рівняння (*) є розв’язком даного рівняння. Тобто розв’язком рівняння (*) буде і функція:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\left(D'_{1n}\cos\frac{an\pi}{l}t+D'_{2n}\sin\frac{an\pi}{l}t\right).$$

Знайдемо D'_{1n} *і* D'_{2n}, використовуючи граничні умови (1-2).

$$u'_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\left(-D'_{1n}\frac{an\pi}{l}\sin\frac{an\pi}{l}t+D'_{2n}\frac{an\pi}{l}\cos\frac{an\pi}{l}t\right).$$

З умови (1) слідує, що $u(x,0)=f(x)$. Тоді $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot D'_{1n}$. Отже D'_{1n} є коефіцієнтами розкладу функції $f(x)$ в ряд за синусами. Тому

$$D'_{1n}=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

З умови (2) слідує, що $u'_t(x,0)=F(x)$. Тоді $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot D'_{2n}\cdot\frac{an\pi}{l}$. Отже $D'_{2n}\cdot\frac{an\pi}{l}$ є коефіцієнтами розкладу функції $F(x)$ в ряд за синусами. Тому

$$D'_{2n}\cdot\frac{an\pi}{l}=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \text{ або } D'_{2n}=\frac{2}{an\pi}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Отже, остаточно маємо розв’язок рівняння (*) при виконанні умов 1-4:

$$\boxed{\begin{gathered}u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right),\\ A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.\end{gathered}}$$

Приклад. Розв’язати першу мішану задачу для хвильового рівняння на відрізку:

$$\begin{aligned}&u''_{tt}=\frac{1}{9}u''_{xx}, && 0<x<2, && 0<t<\infty.\\ &u(x,0)=x(x-2), && u'_t(x,0)=0, &&\\ &u(0,t)=0, && u(2,t)=0. &&\end{aligned}$$