Лекція №7

п. 2.5. Коливання струни в середовищі з опором.

В п. 2.3 було одержане рівняння (1) коливань струни:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \cdot g(x,\, t)}$$

Нехай струна коливається в середовищі з опором. Будемо вважати, що на нескінченно малу частину струни $M_1 M_2$ діє сила: $F_{on} = \alpha \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} dx$, де α - коефіцієнт пропорційності.

Враховуючи це, рівняння (1) матиме вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2m\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \cdot g(x,\, t), \text{ де } \frac{\alpha}{\rho} = 2m\,.$$

У випадку вільних коливань рівняння матиме вигляд:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad (*)$$

Початкові умови: $\boxed{u(x,0) = f(x),\;\; u'_t(x,\,0) = F(x)}$ (1-2)

Граничні умови: $\boxed{u(0,t) = u(l,\,t) = 0}$. (3-4)

Будемо розв'язувати задачу методом Фур'є.

Нехай $u(x,\,t) = X(x)\cdot T(t)$. Підставивши в рівняння (*), матимемо:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{T'' + 2mT'}{T}\right) = \frac{X''}{X} = -\lambda, \qquad \lambda > 0\,.$$

З рівняння $\frac{X''}{X} = -\lambda,$ проводячи міркування, аналогічні п. 2.4, матимемо:

$\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\cdot l = n\pi, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$. При цьому $n = 1,\, 2,\, ...,\quad n \neq 0$, бо інакше $X = 0$.

Числа $\frac{n\pi}{l}$, $(n = 1,\, 2,\, 3,\, ...)$ називають власними числами.

Також $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$. Функції $\sin\frac{n\pi x}{l}$ $(n = 1,\, 2,\, 3, ...)$ називають власними функціями.

З рівняння $\frac{1}{a^2}\left(\frac{T'' + 2mT'}{T}\right) = -\lambda,$ матимемо: $T''_n + 2mT'_n + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \cdot T_n = 0.$

Характеристичне рівняння: $k^2 + 2mk + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 = 0$, корені якого:

$$r_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}, \quad r_{1,2} = -m \pm iq_n, \quad q_n{}^2 = \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 - m^2.$$

Тоді $T_n(t) = e^{-mt}\cdot\left(A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t\right)$.

Отже, $u_n(x,\,t) = e^{-mt}\cdot\left(A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t\right)\cdot \sin\frac{n\pi x}{l}$.

$$\text{I} \quad \boxed{u(x,\,t) = e^{-mt}\cdot \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}}.$$

Врахуємо початкові умови (1-2):

$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} = f(x)$. Тоді $\boxed{A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx}$.

$u'_t(x,\,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(-mA_n + B_n q_n)\sin\frac{n\pi x}{l} = F(x)$. Тоді $\boxed{-mA_n + B_n q_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx}$.

п. 2.6. Коливання нескінченної струни (задача Коші).
Розв'язування методом характеристик (методом Даламбера).

Нескінченна струна є абстракцією струни настільки великої довжини, що її кінці не впливають на коливання довільної точки цієї струни (амплітуда коливань набагато менша довжини струни).

Математична модель задачі вільних коливань нескінченної струни - розв'язати рівняння:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \quad (*) \qquad t \ge 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

При заданих початкових умовах:

$$\boxed{u(x,\,0)= f(x), \quad u'_t(x,\,0)=F(x)}. \quad (1\text{-}2)$$

За допомогою підстановки: $\alpha = x - at, \quad \beta = x + at$, рівняння (*) зводиться до вигляду: $\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}=0$, звідки слідує, що $\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)=0$ або $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)=0$. Отже, $\frac{\partial u}{\partial\alpha}$ залежить лише від α, а $\frac{\partial u}{\partial\beta}$ залежить лише від β.

Тоді $u(x,\,t)=\Phi_1(\alpha)+\Phi_2(\beta)$, де $\Phi_1(\alpha)$ *і* $\Phi_2(\beta)$ - довільні диференційовні функції.

Отже, $\boxed{u(x,\,t)=\Phi_1(x-at)+\Phi_2(x+at)}$ - розв'язок Даламбера.

Врахуємо початкові умови (1-2).

З умови $u(x,\,0)= f(x)$ слідує $f(x)=\Phi_1(x)+\Phi_2(x)$. (3)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial\Phi_1(x-at)}{\partial t}+\frac{\partial\Phi_2(x+at)}{\partial t}=\frac{\partial\Phi_1(x-at)}{\partial x}(-a)+\frac{\partial\Phi_2(x+at)}{\partial x}a.$$

З умови $u'_t(x,\,0)=F(x)$ слідує $\frac{\partial\Phi_1(x)}{\partial x}\cdot(-a)+\frac{\partial\Phi_2(x)}{\partial x}\cdot a = F(x)$.

Отже, $\Phi_1(x)$ та $\Phi_2(x)$ задовольняють рівняння:

$\frac{d\Phi_1(x)}{dx}-\frac{d\Phi_2(x)}{dx}=-\frac{F(x)}{a}$. (4) Враховуючи умови (3-4), матимемо:

$$\begin{cases}\Phi_1(x)-\Phi_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x F(z)dz + C, \quad C=0,\\ \Phi_1(x)+\Phi_2(x)= f(x).\end{cases}$$

Тоді $\Phi_1(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x F(z)dz, \qquad \Phi_2(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x F(z)dz$.

Отже, $u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x-at)+f(x+at)\big)+\frac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at}F(z)dz-\int_0^{x-at}F(z)dz\right)$.

Остаточно матимемо: $u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x-at)+f(x+at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz$.

Приклад. Записати закон руху струни, якщо: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty$, $u(x,0)=x^2-1, \qquad u'_t(x,0)=\sin x$.