Лекція №8

п. 2.7. Вимушені коливання струни.

В п.2.3 було показано, що задача про вимушені коливання струни приводить до неоднорідного рівняння коливань:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+G(x,t)} \qquad (*)$$

Тут через $G(x,t)$ позначено функцію $\frac{1}{\rho}g(x,t)$, де ρ - густина струни, а $g(x,t)$ - густина розподілу зовнішніх сил. Початкові і крайові умови приймемо такими ж, як і для випадку вільних коливань:

$$\boxed{u(x,0)=f(x),\ (1) \qquad u'_t(x,0)=F(x),\ (2) \qquad u(0,\ t)=0,\ (3) \qquad u(l,\ t)=0.\ (4)}$$

Так як і при розв'язуванні звичайних лінійних диференціальних рівнянь, будемо шукати розв'язок рівняння (*) у вигляді суми двох функцій:

$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

Функцію $v(x,t)$ оберемо так, щоб вона задовольняла однорідне рівняння:

$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ (5) і умовам: $v(x,0)=f(x),\quad v'_t(x,0)=F(x),\quad v(0,\ t)=0,\quad v(l,\ t)=0.$

Тоді функція $w(x,t)$ повинна задовольняти неоднорідне рівняння:

$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+G(x,t)$ (6) і нульові початкові і крайові умови:

$$w(x,\ 0)=w'_t(x,0)=0,\quad w(0,t)=w(l,t)=0\,.$$

Легко перевірити, що при такому виборі функцій v і w їх сума буде шуканим розв'язком.

Функція $v(x,t)$ описує вільні коливання струни, що відбуваються за рахунок надання точкам струни початкових відхилень і швидкостей. Функція $w(x,t)$ описує вимушені коливання, які відбуваються під дією зовнішніх сил при відсутності початкових збуджень.

Функцію $v(x,t)$ було вже знайдено в п.2.4:

$$\boxed{v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(A_n\cos\frac{an\pi t}{l}+B_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right)}\,.$$

Будемо шукати функцію $w(x,t)$ у вигляді: $\boxed{w(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}}$ (7), де $\gamma_n(t)$ - не визначені поки що функції від t. Вочевидь $w(x,t)$ задовольняє крайові умови $w(0,t)=w(l,t)=0$. Щоб функція $w(x,t)$ задовольняла і початкові умови, достатньо вважати, що $\gamma_n(t)=\gamma'_t(t)=0$.

Запишемо рівняння (6) у вигляді:

$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=G(x,t)$ і замінимо функцію $w(x,t)$ рядом (7). Тоді матимемо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma''_n(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\gamma_n(t)\right)\sin\frac{n\pi x}{l}=G(x,t).\quad (8)$$

Розкладемо тепер функцію $G(x,t)$ в інтервалі $(0,l)$ в ряд за синусами по аргументу x (це робиться так само, як і розклад в ряд Фур'є функції однієї змінної, але тільки коефіцієнти розкладу будуть функціями змінної t):

$$G(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad (9) \qquad \text{де } g_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l G(x,\ t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Прирівнюючи в розкладах (8) і (9) коефіцієнти при $\sin\frac{n\pi x}{l}$, складемо диференціальні рівняння для відшукання невідомих функцій $\gamma_n(t)$:

$$\boxed{\gamma_n''(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\gamma_n(t)=g_n(t)} \quad (10)$$

До цього рівняння слід приєднати встановлені вище початкові умови: $\boxed{\gamma_n(t)=\gamma_t'(t)=0}$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (10), має вигляд: $A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (10) слід шукати методом варіації довільних сталих.

Після того, як функції $\gamma_n(t)$ будуть знайдені, залишиться підставити їх у формулу (7), і отримати шукану функцію $w(x,\ t)$.

п. 2.8. Поширення тепла в скінченному стержні.

Нехай тонкий однорідний стержень розташовано вздовж осі абсцис $(0<x<l)$, а температура u в кожному перерізі $u=u(x,\ t)$, де x - абсциса, а t - час.

Відомо, що однорідне рівняння теплопровідності має вигляд:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \quad (*) \qquad \text{де } a^2=\frac{k}{c\rho}.$$

Тут k - коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, ρ - лінійна щільність, c - питома теплоємність матеріалу.

Будемо вважати, о бокова поверхня стержня теплоізольована, і на відрізку $[0,\ l]$ знаходяться джерела тепла.

Початкова умова $\boxed{u(x,\ 0)=f(x)}$ (1) задає розподіл температур у стержні в початковий момент часу.

Граничні умови: $\boxed{u(0,t)=\varphi(t), \quad u(l,\ t)=\phi(t)}$ (3-4) полягають у тому, що на кінцях стержня підтримуються задані температури $\varphi(t)$ i $\phi(t)$.

Отже, маємо мішану задачу для рівняння теплопровідності.

За нульових граничних умов $(\varphi(t)=0,\ \ \phi(t)=0)$ розв'язок цієї задачі, знайдений за методом Фур'є, має вигляд:

$$\boxed{u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\cdot t}\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}, \qquad \text{де } \boxed{b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx}.$$

Приклад. Знайти розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності:

$$u_t'=9u_{xx}'', \qquad 0<x<8, \qquad t>0,$$

$$u(x,\ 0)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}, & 0\le x\le 4,\\ 8-x, & 4<x<8.\end{cases}$$

$$u(0,\ t)=u(8,\ t)=0.$$