Лекція №9

п. 2.9. Рівняння математичної фізики в двовимірному випадку.
Коливання мембрани.

Надалі передбачається, що:
1) мембрана є досить пружною й однорідною (натяг T мембрани один і той самий у всіх перерізах);
2) коливання мембрани настільки малі, що можна нехтувати збільшенням площі мембрани;
3) в положенні рівноваги мембрана розташована в площині XOY, а під час коливань кожна точка мембрани відхиляється від площини спокою по перпендикуляру до цієї площини.

Функція $u(x,\ y,\ t)$ - відхилення точки мембрани з координатами $(x,\ y)$ від положення рівноваги в момент часу t.

Рівняння вільних коливань мембрани має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad \text{де } a^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Нехай в положенні рівноваги мембрана займає область D, що обмежена контуром C. Нехай краї мембрани жорстко закріплено (значення функції u в точках контуру C дорівнює нулю, тобто $u|_C = 0$).

Нехай функція $f(x,y)$ задає початкове відхилення мембрани, а $F(x,\ y)$ - початкову швидкість. Тоді мішана задача для рівняння коливань мембрани має вигляд:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}, \qquad (*) \quad t \ge 0, \qquad (x,y) \in D;$$

$$\boxed{u(x,\ y,\ 0) = f(x,y), \qquad u'_t(x,\ y,\ 0) = F(x,y),} \qquad (1\text{-}2)$$

$$\boxed{u|_C = 0} \qquad (3)$$

Умови (1) і (2) є початковими, а умова (3) – граничною (крайовою).

Наприклад, задача про вільні коливання прямокутної мембрани має вигляд:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad 0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le m,, \quad t \ge 0,\\ &u(x,\ y,\ 0) = f(x,\ y), \qquad u'_t(x,\ y,\ 0) = F(x,\ y),\\ &u(0,\ y,\ t) = u(l,\ y,\ t) = u(x,\ 0,\ t) = u(x,\ m,\ t) = 0.\end{aligned}} \qquad (4)$$

Зазвичай, цю задачу розв'язують методом Фур'є, тобто $u(x,\ y,\ t) = X(x)\cdot Y(y)\cdot T(t)$.

Тоді розв'язком задачі є функція:

$$\boxed{u(x,\ y,\ t) = \sum_{k,n=1}^{\infty}\left(A_{kn}\cos\left(\pi a\cdot\sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}\cdot t\right) + B_{kn}\sin\left(\pi a\cdot\sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}\cdot t\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi kx}{l}\cdot\sin\frac{\pi ky}{m}}, \quad (5)$$

$$\text{де} \quad \boxed{\begin{aligned}&A_{kn} = \frac{4}{lm}\int_0^m\!\!\int_0^l f(x,\ y)\cdot\sin\frac{\pi kx}{l}\cdot\sin\frac{\pi ny}{m}\,dxdy;\\ &B_{kn} = \frac{4}{\pi alm\cdot\sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}}\int_0^m\!\!\int_0^l F(x,\ y)\cdot\sin\frac{\pi kx}{l}\cdot\sin\frac{\pi ny}{m}\,dxdy.\end{aligned}} \qquad (6)$$

Приклад 1. Розв'язати першу мішану задачу для хвильового рівняння в прямокутнику:

$$u''_{tt} = 49\Delta u.$$
$$u|_{t=0} = xy(7-x)(2-y), \qquad u'_t|_{t=0} = 0.$$
$$u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=7} = u|_{y=2} = 0.$$

Розв'язування задачі Діріхле у крузі методом Фур'є.

Нехай у крузі радіуса R із центром у початку координат треба знайти подвійно диференційовану функцію, що задовольняє всередині круга рівняння Лапласа:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,} \qquad (*)$$

а на межі кола C задовольняє граничну умову:

$$\boxed{u|_C = f(x,y)}.$$

При переході до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$,

рівняння Лапласа матиме вигляд: $\boxed{\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad u|_{\rho=R} = f(\varphi)}.$

Загальний розв'язок рівняння (*), знайдений за методом Фур'є, має вигляд:

$$\boxed{u(\rho,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)\cdot\rho^n.} \qquad (7)$$

Враховуючи граничні умови матимемо:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)\cdot R^n = f(\varphi).$$

Щоб ця рівність виконувалась, треба, щоб $f(\varphi)$ розкладалась в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi;\pi]$, а A_nR^n, B_nR^n дорівнювали коефіцієнтам ряду Фур'є цієї функції, тобто:

$$A_nR^n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad B_nR^n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Отже, остаточно: $\boxed{A_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad B_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.}$ (8)

Приклад 2. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа у крузі:

$$\Delta u = 0, \quad 0 \le \rho < 3, \qquad u|_{\rho=3} = -\varphi^2 + 2\pi\varphi.$$