Лекція №11

п. 1.3. Класичне означення ймовірності.

Озн. Нехай у результаті випробування може відбутися тільки n елементарних подій $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Будемо додатково вважати, що всі ці елементарні події є рівноможливими. Нехай подія A, яка можлива в результаті даного випробування, є сумою деяких k з цих подій (їх називають сприятливими до появи події A). Тоді *ймовірністю події* A називається число $P(A)$, яке дорівнює відношенню k до n.

Інакше кажучи, *ймовірністю події* A називається відношення числа елементарних результатів випробування, сприятливих до появи A, до числа всіх рівноможливих елементарних результатів випробування.

Тобто: $$\boxed{P(A)=\frac{k}{n}}. \qquad (1)$$

Властивості класичної ймовірності.

1. Ймовірність випадкової події – невід’ємне число, яке не більше одиниці., тобто:
$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці, тобто:
$$P(U)=1.$$

3. Якщо події A *і* B - несумісні, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Зауваження. Властивість 3 можна узагальнити на довільну скінченну кількість подій. А саме: якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - попарно несумісні, то $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$.

Наслідок 1. $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Наслідок 2. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $P(V)=0$.

Приклад 1. Знайти ймовірність того, що число очок, яке випаде на гральному кубику при одному киданні буде: 1) парним; 2) кратним трьом.

п. 1.4. Геометричне означення ймовірності.

Класичне означення ймовірності передбачає, що число елементарних подій, які можуть відбутися у результаті даного випробування – скінченне. На практиці досить часто зустрічаються випробування, число елементарних результатів яких – нескінченне. В таких випадках користуються іншим означенням ймовірності, яке носить назву геометричного.

Геометричні ймовірності – це ймовірності попадання точки в певну область (відрізок, плоску фігуру, просторове тіло, тощо). Дамо означення геометричної ймовірності окремо для одновимірного і двовимірного випадків.

Одновимірний випадок.

Нехай на відрізку G розташовано менший відрізок g. На відрізок G навмання ставлять точку. Припустимо, що ймовірність того, що точка попаде також у відрізок g, не залежить від розташування відрізка g відносно відрізка G і пропорційна його довжині. В цих припущеннях ймовірність попадання точки на відрізок g визначається рівністю:

$\boxed{P(A)=\frac{L(g)}{L(G)}}$, де $L(g)$ *і* $L(G)$ - відповідно довжина g *і* G.

Двовимірний випадок.

Нехай у фігурі G розташовано меншу фігуру g. На фігуру G навмання ставлять точку. Припустимо, що ймовірність того, що точка попаде також у фігуру g, не залежить від розташування фігури g відносно фігури G і пропорційна її площі. В цих припущеннях ймовірність попадання точки у фігуру g визначається рівністю:

$$\boxed{P(A)=\frac{S(g)}{S(G)}},$$ де $S(g)\ i\ S(G)$ - відповідно площі $g\ i\ G$.

Властивості геометричної ймовірності.

1. $0\le P(A)\le 1$. **2.** $P(U)=1$. **3.** Якщо A і B – несумісні, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Зауваження. У випадку класичного означення ймовірність неможливої події рівна 0, і навпаки, з того, що ймовірність деякої події рівна 0, слідує, що ця подія – неможлива. У випадку геометричного означення обернене твердження не має місця. Наприклад, ймовірність попадання точки в певну точку області рівна нулю, однак ця подія не є неможливою.

Задача про зустріч. Дві особи A і B домовилися зустрітися в певному місці, причому кожен з них приходить туди незалежно від іншого у випадковий момент між 12 і 13 годинами. Той, хто приходить першим, чекає 20 хвилин і, якщо другий за цей час не прийде, перший залишає місце зустрічі. Знайти ймовірність того. що зустріч відбудеться.

п. 1.5. Статистичне означення ймовірності.

Другим суттєвим недоліком класичного означення ймовірності є припущення рівноможливості елементарних результатів випробування. На практиці часто достатньо важко вказати підстави, які дозволять вважати елементарні результати випробування рівноможливими. По цій причині поряд з класичним означенням використовують статистичне означення.

Озн. Нехай деякий експеримент відбувається n разів і при цьому подія A відбулися k разів. Відношення k до n називають *відносною частотою появи* A в n випробуваннях.

Позначення: $P^*(A)$.

Отже, за означенням: $$\boxed{P^*(A)=\frac{k}{n}}.$$

Теорія ймовірностей має справу лише з такими подіями, для яких має місце властивість стійкості частот. Ця властивість полягає в тому, що частота події при великому числі випробувань мало відрізняється від деякого числа.

Французький природознавець Ж. Бюффон кинув монету 4040 разів. При цьому герб випав 2048 разів. Отже, в досліді Бюффона: $P^*(A)=\frac{2048}{4040}=0{,}50593...$.

Англійський математик Пірсон кинув монету 24000 разів. При цьому герб випав 12012 разів. Отже, в досліді Пірсона: $P^*(A)=\frac{12012}{24000}=0{,}5005$.

Озн. Число, навколо якого групуються частоти події A при великому числі випробувань називають *ймовірністю події* A і позначають $P(A)$.

Наведене означення ймовірності (його називають статистичним або частотним) виявляється незручним, бо на його основі дуже важко побудувати логічно досконалу теорію: це пов’язано, зокрема, з тим, що в цьому означенні нічого не говориться про те, наскільки великим повинно бути число випробувань і наскільки може відхилитися частота від ймовірності при даному n.

Властивості відносної частоти.

1. $0\le P^*(A)\le 1$. **2.** $P^*(U)=1$. **3.** Якщо A і B – несумісні, то $P^*(A+B)=P^*(A)+P^*(B)$.

п. 1.6. Умовні ймовірності. Теореми множення ймовірностей.

Озн. Нехай $P(B)\neq 0$. *Умовною ймовірністю події* A за умови, що настане подія B, називається число:

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}}\ (1).\qquad \text{Аналогічно}\ \boxed{P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}}\ (2),\quad \text{якщо}\ P(A)\neq 0.$$

З формул (1) і (2) слідує:

$$\boxed{P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)} \quad (3) \qquad \text{або} \qquad \boxed{P(AB)=P(A)\cdot P(A/B)} \quad (4)$$

Формули (3) і (4) виражають теореми множення ймовірностей для двох подій.

Озн. Події A i B називаються *незалежними*, якщо: $\boxed{P(AB)=P(A)\cdot P(B)}$ (5)

Зауваження 1. З формул (3), (4), (5) слідує, що у випадку незалежних подій: $P(A/B)=P(A)$, $P(B)\neq 0$ і $P(B/A)=P(B)$, $P(A)\neq 0$, тобто настання однієї з двох незалежних подій не впливає на ймовірність іншої.

Зауваження 2. Якщо A i B - незалежні, то і $\overline{A}$ i B, $\overline{B}$ i A, $\overline{A}$ i $\overline{B}$.

На практиці для перевірки незалежності подій у більшості випадків виходять з інтуїтивних міркувань, пов'язаних з характером випробувань, а саме, події вважають незалежними, якщо між ними немає причинного зв'язку.

Терема (теорема множення ймовірностей для n подій). Якщо $A_1,\ A_2,...,A_n$ - довільні події, то:

$$\boxed{P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot...\cdot P(A_n/A_1A_{2.}...A_{n-1})} \quad (6)$$

Озн. Події $A_1,\ A_2,...,A_n$ називають *попарно незалежними*, якщо незалежними подіями є будь-які дві з них.

Озн. Події $A_1,\ A_2,...,A_n$ називають *незалежними в сукупності*, якщо вони є попарно незалежними і незалежні також кожна з них і довільний добуток будь-яких інших подій.

Теорема (теорема множення ймовірностей незалежних у сукупності подій). Якщо події $A_1,\ A_2,...,A_n$ - незалежні у сукупності, то:

$$\boxed{P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_{21})\cdot...\cdot P(A_n)} \quad (7)$$

п. 1.7. Теорема додавання ймовірностей.

Теорема 1 (теорема додавання ймовірностей для двох подій). Якщо A i B - довільні події, то:

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)} \quad (1).$$

Зауваження. Якщо A i B - несумісні, то з формули (1) слідує, що:

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)} \quad (2).$$

Теорема 2 (теорема додавання ймовірностей попарно несумісних подій). Якщо події $A_1,A_2,...,A_n$ - попарно несумісні, то:

$$\boxed{P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)} \quad (3)$$

Наслідок 1. Сума ймовірностей подій $A_1,A_2,...,A_n$, які утворюють повну групу попарно несумісних подій , дорівнює 1, тобто:

$$\boxed{P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1} \quad (4)$$

Наслідок 2. Ймовірність події $\overline{A}$, протилежної до події A, знаходиться за формулою:

$$\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)} \quad (5)$$

Приклад 1. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі для першого стрілка дорівнює 0,7, для другого – 0,8. Кожен стрілець зробив по одному пострілу. Знайти ймовірність того, що: 1) влучив тільки один стрілець; 2) влучив принаймні один стрілець.