Лекція №12

п. 1.8. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.

Формула повної ймовірності є простим наслідком теорем додавання та множення ймовірностей.

Теорема 3. Нехай деяка подія A може наступити лише разом з однієї з подій $H_1, H_2, ..., H_n$, які утворюють повну групу і є попарно несумісними. Події $H_1, H_2, ..., H_n$ називають гіпотезами. Тоді ймовірність події A називають повною ймовірністю і обчислюють за формулою:

$$\boxed{P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + ... + P(H_n)\cdot P(A/H_n)} \quad (6)$$

Формулу (6) називають формулою повної ймовірності.

Нехай тепер стало відомо, що в результаті випробування подія A відбулася. Визначимо, як змінилися (у зв'язку з тим, що подія A вже настала) ймовірності гіпотез. Іншими словами, будемо шукати умовні ймовірності: $P(H_1/A), P(H_2/A), ..., P(H_n/A)$.

Мають місце формули:

$$\boxed{P(H_i/A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}, \ i = 1, ..., n,} \quad (7)$$

де $P(A)$ обчислюється за формулою (6).

Формули (7) називаються формулами Байєса або формулами переоцінки гіпотез.

Приклад 1. У ящик, що містить 3 деталі, поклали стандартну деталь. Деталі перемішуються, після чого навмання дістають одну деталь. Знайти ймовірність того, що ця деталь буде стандартною, якщо рівно ймовірні всі можливі припущення про число стандартних деталей, що спочатку знаходилися в ящику.

Приклад 2. Для участі у студентських вибіркових змаганнях вибрали з першої групи 4-х студентів, з 2-ї – 6 студентів, з 3-ї – 5 студентів. Ймовірність того, що відібраний студент з першої, другої, третьої групи потрапить до збірної, рівні відповідно 0,5; 0,4; 0,3. Навмання відібраний учасник змагань потрапив у збірну. З якої з цих трьох груп він ймовірніше за все належить?

п. 1.9. Формула Бернуллі.

Нехай відбуваються послідовні випробування, в кожному з яких може настати або не настати подія A. При цьому ймовірність появи події A в кожному випробуванні одна і та сама. Такі випробування називають послідовними незалежними випробуваннями. Прикладами таких випробувань можуть бути послідовні кидання монети, послідовні кидання грального кубика та ін.

Нехай є серія з n послідовних незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність настання події A дорівнює p.

$P_n(k)$ - ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, подія A відбудеться рівно k разів.

Має місце формула:

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}} \quad (8), \qquad \text{де } \boxed{q = 1 - p}.$$

В формулі (8) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

Формулу (8) називають формулою Бернуллі.

Приклад 3. В урні є 20 білих і 5 чорних куль. Послідовно виймають 6 куль, причому після кожного вибору куля повертається до урни (вибір з поверненням). Яка ймовірність того, що серед відібраних куль буде: 1) рівно 4 білі; 2) не менше 4-х білих; 3) менше 4-х білих?

Знову розглянемо серію з n незалежних випробувань із заданою ймовірністю появи події p і дослідимо ймовірність k появ даної події, тобто $P_n(k)$, як функцію від k ($k = 0,1,2,...,n$).

Можна показати, що ймовірність $P_n(k)$ при зростанні k спочатку зростає до певного максимуму, а потім спадає. Позначимо через k_0 таке значення k, при якому ймовірність $P_n(k)$ досягає максимуму. Число k_0 називається найймовірнішим числом появ події A в n випробуваннях.

Можливі два випадки:

1) $np-q$ **- неціле число**. Тоді k_0 - єдине ціле число, що задовольняє подвійну нерівність:

$$\boxed{np-q<k_0<np+p}; \quad (9)$$

2) $np-q$ **- ціле число**. В такому випадку найймовірніших значень два:

$$k_{0,1}=np-q \text{ і } k_{0,2}=np+p.$$

Приклад 4. Гральний кубик кинули 35 разів. Знайти найймовірніше число появ грані з одиницею.

Приклад 5. Оптова база забезпечує 10 магазинів, від кожного з яких може надійти заявка на день з ймовірністю 0,4 незалежно від заявок інших. Знайти найймовірніше число заявок.

п. 1.10. Формула Пуассона.

В багатьох важливих теоретичних і практичних задачах доводиться знаходити $P_n(k)$ при достатньо великих n і дуже малих значеннях ймовірності p (масові рідкі події).

При достатньо великих n і дуже малих p застосовують формулу Пуассона:

$$\boxed{P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}, \text{ де } \boxed{\lambda=np}. \quad (10)$$

Права частина формули Пуассона одержується як граничне значення формули Бернуллі, якщо $n\to\infty$ так, що добуток np зберігає стале значення $np=\lambda$.

Зауваження. Застосування формули Пуассона виправдане тоді, коли при достатньо великих n ймовірність $p<0{,}1$; ще одна рекомендація: при достатньо великих n повинно бути $npq<9$.

Приклад 6. Військовий підрозділ обстрілює літак зі стрілецької зброї. Знайти ймовірність того, що в ціль влучило не менше двох пуль, якщо по літаку здійснено 5000 пострілів, а ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,001.