Лекція №13

п. 1.11. Локальна та інтегральна теореми Лапласа.

Розглянемо ще одну теорему, яка дає змогу наближено обчислювати біномні ймовірності при великому числі випробувань.

Теорема (локальна теорема Лапласа). Якщо ймовірність появи події A в кожному з випробувань стала і дорівнює p, то ймовірність того, що подія A з'явиться в n випробуваннях рівно k разів:

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)}, \text{ де } \boxed{x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}}. \quad (1)$$

Функція $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Зауваження 1. При використанні функції $\varphi(x)$ варто знати, що ця функція табульована і є парною, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Зауваження 2. Формула Лапласа дає цілком задовільне наближення, якщо n не менше кількох сотень, а p не дуже близьке до 0 чи 1.

Приклад 1. Знайти ймовірність появи герба 55 разів у 100 незалежних киданнях монети.

Знову припустимо, що проводиться серія з n незалежних випробувань. Обчислимо тепер ймовірність того, що подія A в n випробуваннях з'явиться не менше k_1 і не більше k_2 разів.

Теорема (інтегральна теорема Лапласа). Якщо ймовірність появи події A в кожному з випробувань стала і дорівнює p, то ймовірність того, що подія A з'явиться в n випробуваннях не менше k_1 і не більше k_2 разів наближено дорівнює:

$$\boxed{P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'),} \text{ де } \boxed{x' = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}}. \quad (2)$$

Функція $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ називається функцією Лапласа.

Зауваження. Функція $\Phi(x)$ табульована. При використанні таблиці значень функції Лапласа необхідно пам'ятати, що $\Phi(x)$ - непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ і $\Phi(x \geq 5) = 0{,}5$.

Приклад 2. В страховій компанії застраховано від пожежі 10000 осіб. На підставі статистичних даних встановлено, що ймовірність пожежі протягом трьох років дорівнює 0, 006. Страховий внесок складає 12 тис. грн. в рік, а якщо за цей час виникне пожежа, компанія сплачує потерпілому 1000 тис. грн. Знайти ймовірність того, що:

1) по закінченню трьох років роботи страхова компанія понесе збиток;
2) страхова компанія отримає прибуток не менше 40000 тис. грн.

п. 1.11. Ймовірність відхилення відносної частоти від ймовірності.

Знайдемо ймовірність того, що відносна частота появи події A в n незалежних випробуваннях відхилиться від її ймовірності p за абсолютною величиною не більше, ніж на ε, тобто: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right)$. Тут $\frac{m}{n}$ - відносна частота появи події в n випробуваннях.

Використаємо інтегральну формулу Лапласа.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P\left(p - \varepsilon \leq \frac{m}{n} \leq p + \varepsilon\right) = P\big((p-\varepsilon)n \leq m \leq (p+\varepsilon)n\big) = \Phi(x'') - \Phi(x') =$$

$$= \Phi\left(\frac{n(p+\varepsilon) - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{n(p-\varepsilon) - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right).$$

Отже, $\boxed{P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)}$ (3)

Права частина цієї рівності при $n\to\infty$ прямує до 1, так як $\Phi(+\infty)=0{,}5$.

Отже, $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.}$ (7)

Формула (7) виражає теорему Бернуллі, яка є найпростішою формою так званого закону великих чисел.

Теорема Бернуллі. Якщо в кожному з незалежних випробувань випадкова подія настає з однією і тією ж самою ймовірністю p, то при достатньо великому числі випробувань з ймовірністю, як завгодно близькою до 1, частота цієї події відрізняється від її ймовірності p менше від як завгодно малого наперед заданого числа $\varepsilon>0$.

Терема Бернуллі дає математичне підтвердження того, що при великому числі випробувань повинна виконуватисghя наближена рівність $\frac{m}{n}\approx p$.

Приклад 3. Скільки разів потрібно підкинути монету, щоб з ймовірністю 0,995 можна було чекати, що відносна частота випадіння герба відхилиться від ймовірності його появи в одному випробуванні за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,02?

Тема 2. Випадкові величини.

п. 2.1. Дискретні і неперервні випадкові величини.

Озн. *Випадковою* називають величину, яка у результаті випробування приймає лише одне і тільки одне можливе значення, яке наперед невідоме та залежить від випадкових факторів, які не можуть бути враховані заздалегідь.

Будемо позначати випадкові величини великими латинськими буквами: $X, Y, Z, ...$, а їх можливі значення відповідними малими буквами: $x, y, z, ...$.

Розглянемо такі приклади.

Приклад 1. Випробування полягає у киданні грального кубика. Нехай випадкова величина X - число очок, що випадає при одному киданні. Тоді всі можливі значення X: $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4, x_5=5, x_6=6$.

Приклад 2. Стрільцю видають патрони до першого промаху. Нехай випадкова величина X - кількість патронів, виданих стрільцю. Тоді можливі значення X: $x_1=1, x_2=2, x_3=3, ...$.

Приклад 3. Випробування полягає у тому, що стрілець робить один постріл у круглу мішень радіуса R. Нехай випадкова величина X - відстань від центра мішені до місця влучення. Тоді X може набувати будь-якого невід'ємного значення, яке не більше R, тобто $x\in[0, R]$.

З наведених прикладів слідує доцільність розрізняти випадкові величини за особливостями їх можливих значень.

Озн. *Дискретною* називають випадкову величину, яка приймає окремі, ізольовані можливі значення (приклади 1 і 2).

Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути як скінченним (приклад 1), так і нескінченним (приклад 2).

Озн. *Неперервною* називають випадкову величину, яка може приймати всі можливі значення з деякого проміжку (приклад 3).

Число можливих значень неперервної випадкової величини завжди нескінченне.

Озн. *Законом розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини* називають відповідність між її можливими значеннями та їх ймовірностями.