Лекція №14

п. 2.2. Функція розподілу випадкової величини (інтегральна функція розподілу).

Перелік всіх можливих значень випадкової величини та їх ймовірностей – не є загальним способом задання випадкової величини. Якщо випадкова величина є неперервною, то її значення повністю заповнюють собою деякий інтервал і скласти їх повний перелік неможливо. Отже, доцільно дати загальний спосіб задання будь-якої випадкової величини. З цією метою вводять функції розподілу ймовірностей випадкових величин.

Озн. *Функцією розподілу випадкової величини* або *інтегральною функцією розподілу* називають функцію $F(x)$, яка визначає для кожного значення x числової осі ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення , менше x:

$$\boxed{F(x)=P(X<x)} \qquad (1)$$

Геометрична інтерпретація $F(x)$ така: якщо значення аргументу x зобразити точками числової осі, то $F(x)$ є ймовірність того, що точки значень X лежать лівіше точки x.

Властивості функції розподілу.

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ - неспадна функція, тобто, якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Наслідок 1. Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $[a;\ b)$ визначається рівністю:

$$\boxed{P(a \le X < b) = F(b) - F(a)} \qquad (2)$$

Наслідок 2. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме конкретне, наперед задане значення, рівна нулю.

З наслідку 2 випливає, що для неперервної випадкової величини:

$$P(a<X<b)=P(a\le X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b).$$

3. Якщо всі значення випадкової величини знаходяться на відрізку $[a,b]$, то:
$F(x)=0$ при $x \le 0$ і $F(x)=1$ при $x > b$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$.

Приклад 1. Задано ряд розподілу дискретної випадкової величини:

$X=x$	0	1	2
$P=p$	0,25	0,5	0,25

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

Приклад 2. Задано функцію розподілу неперервної випадкової величини:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3}, & -1<x\le 2; \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення з інтервалу (0; 1).

п. 2.3. Щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини (диференціальна функція розподілу).

Озн. *Щільністю розподілу ймовірностей* або *диференціальною функцією розподілу* неперервної випадкової величини називають функцію $f(x)$, яка є похідною від функції розподілу, тобто:

$$\boxed{f(x)=F'(x)}. \qquad (3)$$

За допомогою функцій $F(x)$ і $f(x)$ уточнимо поняття неперервної випадкової величини. А саме, випадкова величина є неперервною, якщо її функція розподілу $F(x)$ неперервна, а густина розподілу існує і неперервна скрізь, крім, може, скінченної кількості точок.

За допомогою функції $f(x)$ знайдемо ймовірність попадання неперервної випадкової величини X в інтервал $(a,\ b)$.

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Отже:

$$\boxed{P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx}. \quad (4)$$

З геометричної точки зору права частина формули (4) – площа криволінійної трапеції під графіком функції $y=f(x)$.

Встановимо зв'язок між функціями $F(x)$ і $f(x)$.

$$F(x)=P(X<x)=P(-\infty<X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Отже:

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx}. \quad (5)$$

Ймовірнісний зміст щільності розподілу.

За означенням $f(x)=F'(x)$, тому $f(x)dx=F'(x)dx=dF(x)$.

З математичного аналізу відомо, що $dF(x)\approx\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)$.

Але з формули (2): $\quad F(x+\Delta x)-F(x)=P(x<X<x+\Delta x)$.

Тоді остаточно маємо, що: $\quad f(x)\Delta x\approx P(x<X<x+\Delta x)$.

Ймовірнісний зміст цієї рівності такий: ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення яке належить інтервалу $(x,\ x+\Delta x)$, наближено дорівнює добутку щільності в точці x на довжину інтервалу Δx.

Властивості щільності розподілу.

1. $f(x)\geq 0$.

2. $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1}. \qquad (6)$

З геометричної точки зору формула (6) означає, що вся площа криволінійної трапеції під графіком функції $y=f(x)$ дорівнює 1.

Приклад. Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq-\pi/2,\\ a\cos x, & -\pi/2<x\leq\pi/2,\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$$

Знайти значення числового параметру a, функцію розподілу $F(x)$ і $P(0<X<\pi/4)$.