Лекція №15

п. 2.4. Числові характеристики випадкових величин.

В деяких задачах буває достатньо охарактеризувати випадкову величину деякими кількісними показниками, які дають достатню для даної задачі інформацію про випадкову величину. Ці кількісні показники називають числовими характеристиками випадкової величини.

Серед числових характеристик розрізняють характеристики положення (математичне сподівання, мода, медіана та ін.) та характеристики розсіювання (дисперсія, середнє квадратичне відхилення та ін.).

Характеристики положення.

Озн. *Математичним сподіванням* (середнім значенням за розподілом) називається число $M(X)$, яке, в залежності від типу випадкової величини, визначається за формулою:

$$\boxed{M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i}, \quad (1) \quad \text{якщо } X \text{ - дискретна випадкова величина}$$

$$\boxed{M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx}, \quad (2) \quad \text{якщо } X \text{ - неперервна випадкова величина}$$

Властивості математичного сподівання.

1. Математичне сподівання сталої дорівнює самій цій сталій, тобто:

$$M(C)=C, \text{ де } C=const.$$

Тут сталу C можна розглядати як дискретну випадкову величину, яка набуває лише одного значення C з ймовірністю 1.

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(CX)=C\cdot M(X), \text{ де } C=const.$$

3. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Ця властивість справедлива для суми довільного скінченного числа випадкових величин.

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y).$$

При цьому випадкові величини називають незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення приймає інша випадкова величина.

Ймовірнісний зміст математичного сподівання.

Нехай проведено n випробувань, в яких дискретна випадкова величина X прийняла m_1 разів значення x_1, m_2 разів - значення x_2, … , m_k разів - значення x_k.

Тоді сума всіх значень, які прийняла випадкова величина X, дорівнює:

$$x_1m_1+x_2m_2+...+x_km_k.$$

Знайдемо середнє арифметичне $\overline{X}$ всіх значень X:

$$\overline{X}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+...+x_km_k}{n},$$

$$\overline{X}=x_1\frac{m_1}{n}+x_2\frac{m_2}{n}+...+x_k\frac{m_k}{n}, \quad \text{тобто } \overline{X}=x_1\cdot p^*{}_1+x_2\cdot p^*{}_2+...+x_k\cdot p^*{}_k,$$

Коли n велике, то $p^*\approx p$, то $\overline{X}\approx x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+...+x_k\cdot p_k$.

Отже : $\boxed{\overline{X}\approx M(X)}$.

Ймовірнісний зміст цього результату такий: математичне сподівання наближено дорівнює (тім точніше, чім більше n) середньому арифметичному значень випадкової величини, що спостерігаються.

Озн. *Модою* $M_0(X)$ дискретної випадкової величини X називається таке значення випадкової величини X, якому відповідає найбільша ймовірність.

Озн. *Модою* $M_0(X)$ неперервної випадкової величини X визначається як точка максимуму її щільності розподілу.

Зауваження. Випадкова величина може: мати єдину моду (унімодальний розподіл), мати декілька мод (мультимодальний розподіл), або не мати моди взагалі.

Озн. Медіаною неперервної випадкової величини X називається таке значення цієї випадкової величини, яке позначається $M_e(X)$ і визначається умовою:

$$\boxed{P(X < M_e(X)) = P(X > M_e(X))}. \quad (*)$$

З геометричної точки зору ця умова означає, що площа під кривою $y = f(x)$ зліва від точки $M_e(X)$ дорівнює площі справа від неї.

Зауваження. з формули (*) слідує, що медіана є коренем рівняння:

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}}.$$

Характеристики розсіювання.

На практиці часто потрібно оцінити ступінь розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її середнього значення.

Озн. *Дисперсією* випадкової величини X називається число $D(X)$, яке визначається формулою: $D(X) = M(X - M(X))^2$.

Тобто: $\boxed{D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i}$ (3) - для дискретної випадкової величини X,

$\boxed{D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx}$ (4)- для неперервної випадкової величини X.

Властивості дисперсії.

1. Дисперсія сталої дорівнює нулю:

$$D(C) = 0, \text{ де } C = const.$$

Тут сталу C можна розглядати як дискретну випадкову величину, яка набуває лише одного значення C з ймовірністю 1.

2. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату:

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X), \text{ де } C = const.$$

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Ця властивість справедлива для суми довільного скінченного числа взаємно незалежних випадкових величин.

Можна показати, що має місце наступна формула для обчислення дисперсії:

$\boxed{D(X) = M(X^2) - (M(X))^2}$, (5) де

$\boxed{M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x^2{}_i \, p_i}$, якщо X - дискретна випадкова величина

$\boxed{M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx}$, якщо X - неперервна випадкова величина

Озн. *Середнім квадратичним відхиленням* випадкової величини X називається число $\sigma(X)$, яке дорівнює кореню квадратному із дисперсії, тобто:

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{D(X)}} \quad (6)$$

Приклад 1. Обчислити $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$ дискретної випадкової величини X, якщо:

$X=x$	0,1	2	10	20
$P=p$	0,4	0,2	0,15	0,25

Приклад 2. Обчислити $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$ неперервної випадкової величини X, якщо:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^3/6, & 0\le x\le 2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

Числові моменти випадкових величин.

Озн. *Початковим моментом* m*-го порядку* випадкової величини X називається число α_m, яке визначається за формулою:

$$\boxed{\alpha_m=M(X^m)=\sum_{i=1}^{n}x^m{}_i\,p_i}, \quad (7) \quad \text{якщо } X \text{ - дискретна випадкова величина}$$

$$\boxed{\alpha_m=M(X^m)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^m\cdot f(x)dx}, \quad (8) \quad \text{якщо } X \text{ - неперервна випадкова величина}$$

Озн. *Центральним моментом* m*-го порядку* випадкової величини X називається число β_m, яке визначається за формулою:

$$\boxed{\beta_m(X)=M(X-M(X))^m}.$$

Тобто:

$$\boxed{\beta_m=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^m\cdot p_i} \quad (9) \text{ - для дискретної випадкової величини } X,$$

$$\boxed{\beta_m=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^m\cdot f(x)dx} \quad (10) \text{ - для неперервної випадкової величини } X.$$

Можна показати, що:

$\alpha_1=M(X),\quad \alpha_2=M(X^2),\qquad \beta_1=0,\ \ \beta_2=\alpha^2-\alpha_1^{\,2}.$

Приклад 3. Обчислити $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$ неперервної випадкової величини X, якщо:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x/3, & 0\le x\le\sqrt{6},\\ 0, & x\ge\sqrt{6}.\end{cases}$$