## Ряди Фур'є

Рядом Фур'є періодичної функції $f(x)$ з періодом $2\pi$, що визначена на сегменті $[-\pi;\pi]$, називається ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \qquad (1)$$

де $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ (n=1,2,\ldots)$.

Якщо ряд (1) збіжний, то його сума $S(x)$ – періодична функція з періодом $2\pi$, тобто $S(x+2\pi)=S(x)$.

***Теорема***. (достатня умова подання функції через її ряд Фур'є).

Нехай $f(x)$ – $2\pi$ періодична і кусково-диференційовна на відрізку $[-\pi;\pi]$ функція. Тоді ряд Фур'є цієї функції збіжний на відрізку $[-\pi;\pi]$ до функції $S(x)$, при цьому

1) $S(x)=f(x)$ в усіх точках неперервності функції $f(x)$;

2) якщо $x_0$ – точка розриву першого роду функції $f(x)$, то

$$S(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)}{2};$$

3) $$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{\lim\limits_{x\to\pi-0}f(x)+\lim\limits_{x\to\pi+0}f(x)}{2}.$$

Нехай кусково-диференційовна функція $f(x)$ парна на відрізку $[-\pi;\pi]$, тоді

$$b_n=0,\ a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ n=1,2,\ldots.$$

Отже, ряд Фур'є матиме вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\ n=1,2,\ldots.$$

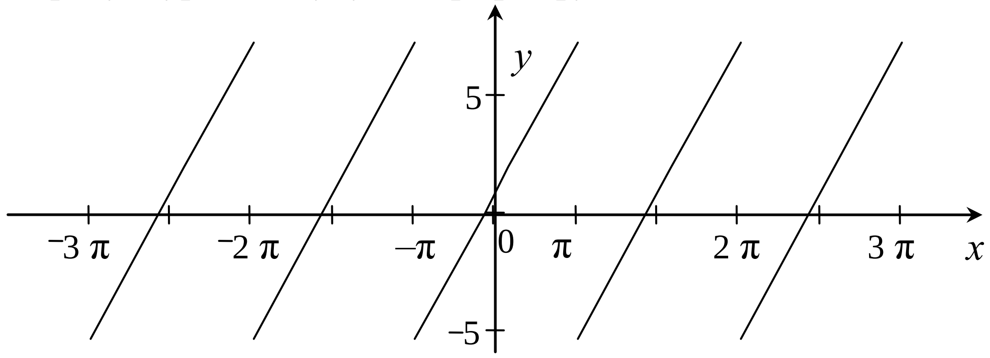
Аналогічно, для непарної кусково-диференційовної на інтервалі $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ ряд Фур'є запишеться у вигляді

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx, n=1,2,\ldots.$$

Приклад 11. (Задача 7.5) Розкласти задану функцію $f(x)$ в ряд Фур'є в інтервалі $(-\pi;\pi)$, якщо в цьому інтервалі $f(x)=2x+1$ і функція періодична з періодом $2\pi$.

*Розв'язання.*

Функція кусково-диференційована на інтервалі $(-\pi;\pi)$, тому її можна подати через ряд Фур'є. При цьому задача зводиться до знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є. Побудуємо графік функції




Визначимо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)dx=\frac{1}{\pi}(x^2+x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}(\pi^2+\pi-\pi^2+\pi)=2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\cos nxdx=\begin{vmatrix}u=2x+1 & du=2dx\\ dv=\cos nxdx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(2x+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(2\pi+1)\sin\pi n-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}(-2\pi+1)\sin(-\pi n)+\frac{2}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n^2}\cos\pi n-\frac{2}{n^2}\cos(-\pi n)\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\sin nxdx=\begin{vmatrix}u=2x+1 & du=2dx\\ dv=\sin nxdx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(2x+1)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(2\pi+1)\cos\pi n+\right.$$

$$+\frac{1}{n}(-2\pi+1)\cos(-\pi n)+\frac{2}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\Bigg)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(-1)^n(-2\pi-1-2\pi+1)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n^2}(\sin\pi n-\sin\pi n)\right)=\frac{(-1)^n}{\pi n}(-4\pi)=\frac{4(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже, розклад функції $f(x)=2x+1$ в ряд Фур'є має вигляд

$$2x+1=1+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=1+4\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots\right),$$

$$-\pi<x<\pi.$$

<u>Зауваження.</u> При обчисленні коефіцієнтів ми використали, що $\sin\pi n=0,\ \cos\pi n=(-1)^n$.