Лекція №1.

Тема: Матриці.

План лекції:

1. Основні означення.
2. Дії над матрицями: (самостійне опрацювання)
    1) додавання матриць;
    2) множення матриці на число, віднімання матриць;
    3) множення матриць;
    4) транспонування матриць;
    5) піднесення матриць до натурального степеня.

1. <u>Основні означення.</u>

Означення 1.1. Матрицею називається прямокутна таблиця чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

що містить m рядків та n стовпців.

Якщо $m=n$, то матриця називається квадратною, а число m, що дорівнює n, - її порядком. В загальному випадку матриця називається прямокутною (розмірів $m\times n$). Числа a_{ij}, що утворюють матрицю називаються її елементами.

В запису a_{ij} перший індекс i означає номер рядка, а другий індекс j - номер стовпця.

Поряд з позначенням (1.1) використовують ще й таке позначення матриці

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

або скорочено $\|a_{ij}\|$ ($i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n$). Часто матрицю (1.1) позначають однією великою буквою латинського алфавіту ($A, D, C, ..$).

Матриця, що складається з одного стовпця

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$$

називається матрицею-стовпцем.

Матриця, що складається з одного рядка $(a_1 \ \ a_2 \ \ \dots \ \ a_n)$, називається матрицею-рядком.

Для квадратної матриці вводяться поняття головної та побічної діагоналей. Головною діагоналлю називається діагональ, яку утворюють елементи a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}, побічною - діагональ, яку утворюють елементи a_{n1}, $a_{(n-1)2}$,..., a_{1n}.

Квадратна матриця, всі елементи якої, за винятком елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається діагональною:

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається одиничною і позначається буквою E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою і позначається буквою O:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Означення 1.2. Дві матриці називаються рівними, якщо вони мають однакові розміри і всі їх відповідні елементи збігаються.

2. Дії над матрицями: (самостійне опрацювання)

1) додавання матриць

Означення 2.1.. Сумою $A+B=C$ двох матриць A і B, однакових розмірів $m \times n$, називається матриця C тих же розмірів, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць A і B, тобто

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i=1, 2,...,m; j=1, 2,..., n).$$

Операція знаходження суми матриць називається операцією додавання матриць.

Властивості операції додавання матриць:

1. $A + B = B + A$ *(комутативна властивість).*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(асоціативна властивість).*

2) множення матриці на число, віднімання матриць

Означення 2.2.. Добутком $\alpha A=C$ матриці $A=\|a_{ij}\|$ розмірів $m\times n$ на число α називається матриця $C=\|c_{ij}\|$ тих же розмірів, елементи якої одержуються із відповідних елементів матриці A множенням на число α, тобто

$$c_{ij} = \alpha a_{ij} \quad (i=1, 2, ..., m; j= 1, 2, ..., n).$$

Операція знаходження добутку матриці на число називається операцією множення матриці на число.

Властивості множення матриці на число:

1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(дистрибутивна властивість числового множника відносно суми матриць).*

2. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ *(дистрибутивна властивість матричного множника відносно суми чисел).*

3. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$ *(асоціативна властивість).*

Різниця A-B двох матриць однакових розмірів визначається рівністю A-B $=A+(-1)B$.

3) множення матриць

Означення 2.3 Матриця A називається узгодженою з матрицею B, якщо кількість стовпців матриці A рівна кількості рядків матриці B.

Операція множення двох матриць можлива лише для узгоджених матриць.

Означення 2.4.. Добутком $AB=C$ матриці A розмірів $m\times n$ і матриці B розмірів $n\times p$ називається матриця C розмірів $m\times p$, елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A і елементів j-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\ \ (i=1,\ 2,\ ...,\ m;\ j=1,\ 2,\ ...,\ p).$$

Операція знаходження добутку матриць A і B називається операцією множення матриць A і B.

Властивості операції множення матриць:

1. $(AB)C=A(BC)$ (*асоціативна властивість*).
2. $A(B+C)=AB+AC$ (*дистрибутивна властивість першого множника*).
3. $(A+B)C=AC+BC$ (*дистрибутивна властивість другого множника*).

Множення матриць в загальному випадку не підлягає комутативній властивості.

Якщо $AB=BA$, то матриці називаються комутативними.

Приклад 1. Знайти матрицю $C=A\cdot B$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Розв'язок:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot(-2) & 1\cdot2+2\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot(-1)\\ 1\cdot0+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot2+(-1)\cdot0 & 0\cdot3+(-1)\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

4) транспонування матриць;

Нехай дано матрицю

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ . & . & . & .\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Матриця

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

одержана із A заміною рядків на стовпці з збереженням порядку їх слідування, називається транспонованою до A .

Операція заміни матриці A на A^T називається транспонуванням матриці A.

Властивості транспонування матриці:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
2. $(\alpha \cdot B)^T = \alpha \cdot A^T$.
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
4. $(A^T)^T = A\ A^T$.

Якщо квадратна матриця S збігається зі своєю транспонованою матрицею S^T, тобто $S = S^T$, то така матриця називається симетричною. Якщо квадратна матриця K відрізняється знаком від своєї транспонованої матриці K^T, тобто $K = K^T$, то така матриця називається кососиметричною.

5) піднесення матриць до натурального степеня.

Означення 1.2. Цілим додатним степенем A^n квадратної матриці A є добуток n матриць, рівних A:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A \cdot A}_{n}$$

Приклад 2. Знайти *f(A),* якщо *f(x)=x²-x-1,*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауваження 1.2. Якщо в многочлені *f(x)* аргумент *x* покладають рівним квадратній матриці *A,* то вільний член *a* цього многочлена замінюють на матрицю *aE*, де *E* - одинична матриця того ж порядку, що і A .

Розв'язок.

$$f(A)=A^2-A-E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4+3+1 & 2+1-1 & 2+2+0 \\ 6+3+2 & 3+1-2 & 3+2+0 \\ 2-3+0 & 1-1+0 & 1-2+0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2+1 & 1 & 1 \\ 3 & 1+1 & 2 \\ 1 & -1 & 0+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$