Лекція №10.

Тема: Лінії другого порядку.

План лекції:

1. Поняття алгебраїчної лінії. Лінії другого порядку.
2. Еліпс.
3. Гіпербола.
4. Парабола.

1. Поняття алгебраїчної лінії. Лінії другого порядку

Найбільш простими для вивчення в аналітичній геометрії є лінії, які у декартовій прямокутній системі координат мають алгебраїчні рівняння, наприклад:

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \tag{2}$$

Рівняння (1) є рівнянням 1-го порядку (його коефіцієнти a, b, c можуть бути довільними дійсними числами, але хоча б один з коефіцієнтів a або b не дорівнює нулю). Нам вже відомо, що таке рівняння визначає пряму на площині, тому пряму називають алгебраїчною лінією 1-го порядку. Рівняння (2) є рівнянням 2-го порядку (хоча б один з коефіцієнтів a, b або c має бути ненульовим).

Алгебраїчні рівняння можуть визначати: реальні криві, сукупності кривих, точки (вироджені криві) або порожню множину («уявні» криві).

Теорема 10.1. Лінія, що має алгебраїчне рівняння n-го порядку у деякій декартовій прямокутній системі координат, у будь-якій іншій декартовій прямокутній системі координат також має алгебраїчне рівняння n-го порядку.

Отже, алгебраїчний характер рівняння і його порядок є властивостями, притаманними самій лінії, тобто вони не залежать від вибору декартової системи координат (інваріантні відносно вибору системи координат).

Означення 10.1. Лінією 2-го порядку на площині називають множину точок площини, координати (x, y) яких задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

де a_{11}, a_{12} і a_{22} одночасно не дорівнюють нулю.

2. Еліпс

Означення 10.2. Еліпсом називається множина точок, для кожної з яких сума відстаней до двох фіксованих точок площини, що називаються фокусами, є стале число $2a$, яке більше за відстань $2c$ між фокусами.

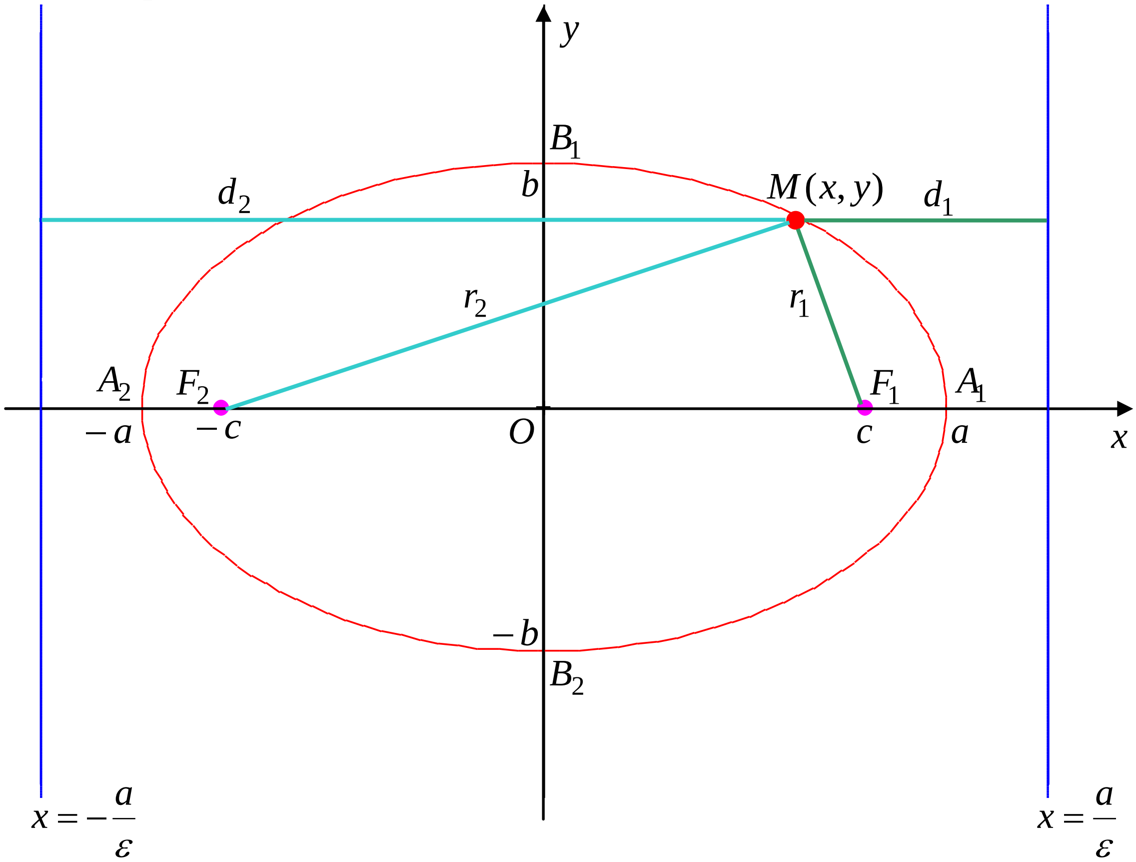
Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрано так, що фокуси еліпса розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат в точках $F_1(c,0)$ і $F_2(-c,0)$, то в цій системі координат рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

де $b^2 = a^2 - c^2$.

Рівняння (3) називається канонічним рівнянням еліпса.

При такому виборі системи координат осі координат збігаються з осями симетрії еліпса, а початок координат – з центром симетрії еліпса. Точки перетину еліпса з осями координат $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ називаються вершинами еліпса. Відрізки A_1A_2 і B_1B_2, що з'єднують протилежні вершини еліпса, а також їх довжини $2a$ і $2b$, називаються відповідно великою (фокальною) та малою осями еліпса. Параметри a та b, які входять у рівняння еліпса (3), дорівнюють його півосям.



Форма еліпса (міра його стиску) характеризується його ексцентриситетом $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Оскільки $c < a$, то $0 \le \varepsilon < 1$. У частинному випадку, коли $a = b$ ($c = 0$, $\varepsilon = 0$), еліпс перетворюється в коло, рівняння якого має вигляд

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Відстані $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ від довільної точки $M(x, y)$ еліпса до фокусів називаються фокальними радіусами точки M. З означення еліпса випливає, що $r_1 + r_2 = 2a$. Фокальні радіуси можуть бути обчислені за формулами

$$r_1 = a - \varepsilon\, x; \quad r_2 = a + \varepsilon\, x,$$

де x – абсциса точки M.

Директрисами еліпса називаються дві прямі, паралельні малій осі, які віддалені від неї на відстань $\frac{a}{\varepsilon}$ (коло директрис не має). Рівняння директрис мають вигляд

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}.$$

Теорема 10.2. Якщо r – відстань від довільної точки еліпса до деякого фокуса, d – відстань цієї ж точки до однобічної з цим фокусом директриси, то відношення r/d є величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε еліпса, тобто $r/d=\varepsilon$.

Рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точці $M(x_1,y_1)$ еліпса має вигляд

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

Якщо в декартовій прямокутній системі координат фокуси еліпса розташовані на прямій $y=y_0$, симетрично відносно прямої $x=x_0$, в точках $F_1(x_0+c,y_0)$ і $F_2(x_0-c,y_0)$, то рівняння еліпса набуде вигляду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Приклад 10.1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо він проходить через точку $M(-2\sqrt{5},2)$ і відстань між його фокусами $2c=6\sqrt{3}$.

Розв'язок.

Нехай $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – шукане рівняння еліпса. Координати точки M повинні задовольняти це рівняння. Отже, $\frac{20}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$. Оскільки $b^2=a^2-c^2$, то $a^2-b^2=c^2 \Rightarrow a^2-b^2=27$. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases}\frac{20}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1,\\ a^2-b^2=27,\end{cases}$$

знаходимо $a^2=36$, $b^2=9$. Таким чином, рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1.$$

3. Гіпербола

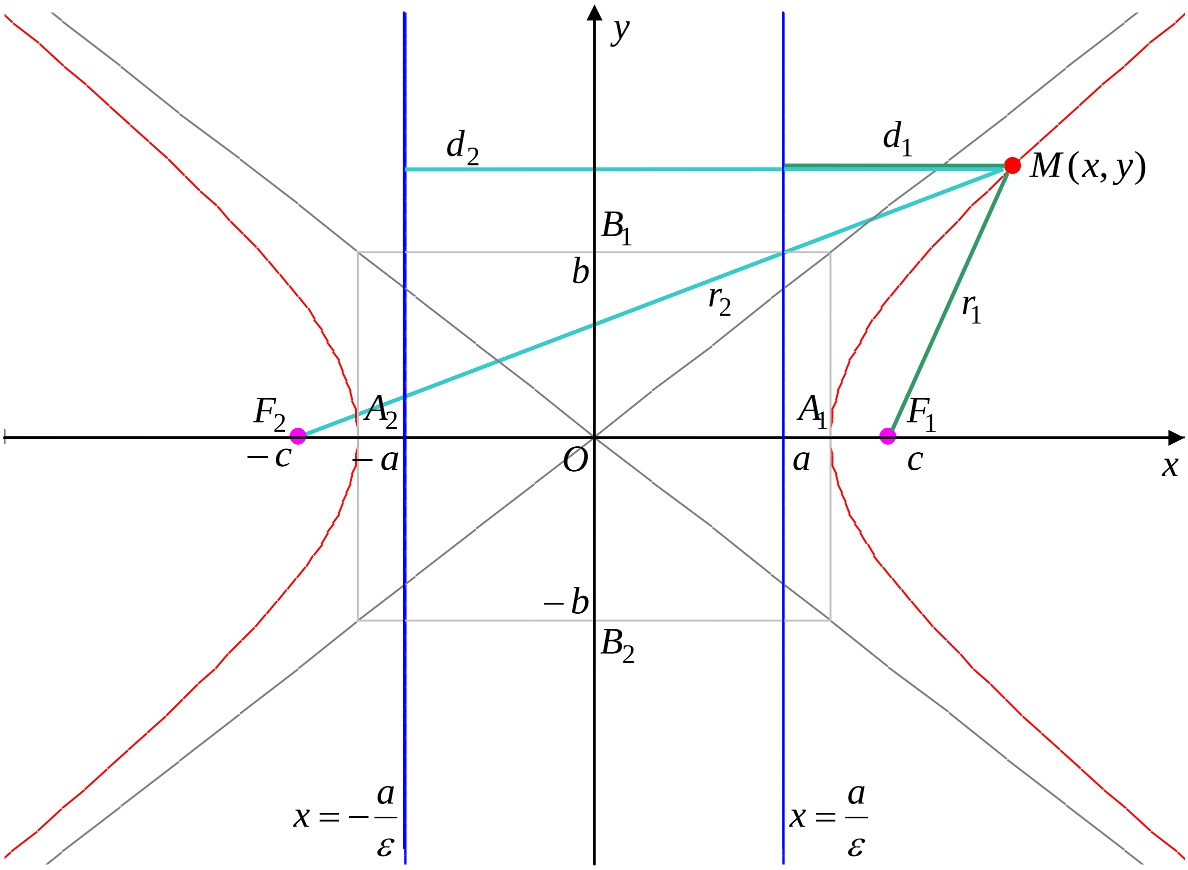
Означення 10.3. Гіперболою називається множина точок, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок площини, що називаються фокусами, є стале додатне число $2a$, яке менше за відстань $2c$ між фокусами.

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрано так, що фокуси даної гіперболи розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат в точках $F_1(c,0)$ і $F_2(-c,0)$, то в цій системі координат рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4}$$

де $b^2=c^2-a^2$.

Рівняння (4) називається канонічним рівнянням гіперболи. При такому виборі системи координат осі координат збігаються з осями симетрії гіперболи, а початок координат – з її центром симетрії. Точки $A_1(a,0)$ і $A_2(-a,0)$ називаються вершинами гіперболи, а точки $B_1(0,b)$ і $B_2(0,-b)$ – уявними вершинами гіперболи. Відрізок A_1A_2 і його довжина $2a$ називається дійсною віссю, а відрізок B_1B_2 і його довжина $2b$ – уявною віссю гіперболи.



Ексцентриситетом гіперболи називається відношення відстані між фокусами до дійсної осі

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \quad (\text{оскільки } c>a\text{, то } \varepsilon>1).$$

Відстані $r_1=MF_1$ і $r_2=MF_2$ від будь-якої точки гіперболи $M(x,y)$ до фокусів називаються фокальними радіусами точки M. З означення гіперболи випливає, що $|r_1-r_2|=2a$.

Фокальні радіуси точки $M(x,y)$ правої вітки гіперболи обчислюються за формулами

$$r_1=\varepsilon x-a; \quad r_2=\varepsilon x+a.$$

Фокальні радіуси точки $M(x,y)$ лівої вітки гіперболи обчислюються за формулами

$$r_1=-\varepsilon x+a; \quad r_2=-\varepsilon x-a.$$

Директрисами гіперболи називаються прямі, перпендикулярні до фокальної осі, які віддалені від центра на відстань $\frac{a}{\varepsilon}$. Директриси мають рівняння $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Теорема 10.3. Якщо r – відстань від довільної точки гіперболи до деякого фокуса, d – відстань від цієї ж точки до однобічної з цим фокусом директриси, то відношення r/d є величина стала, яка дорівнює ексцентриситету гіперболи $r/d = \varepsilon$.

Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Асимптоти містять діагоналі прямокутника, центр якого збігається з центром гіперболи, а сторони рівні і паралельні осям гіперболи.

Якщо $a = b$, то рівняння гіперболи має вигляд

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Така гіпербола називається рівнобічною.

Дві гіперболи, визначені в одній системі координат рівняннями $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ і $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, називаються спряженими. Такі гіперболи мають спільні осі і асимптоти, але дійсна вісь однієї є уявною віссю другої, і навпаки.

Рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M(x_1, y_1)$ гіперболи має вигляд

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Якщо осі декартової системи координат вибрані так, що фокуси гіперболи розташовані на прямій $y = y_0$ симетрично відносно точки $M_0(x_0, y_0)$ в точках $F_1(x_0 + c, y_0)$ і $F_2(x_0 - c, y_0)$, то в цій системі координат рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Приклад 10.2. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи, що відстань між її вершинами дорівнює 48 та рівняння асимптот мають вигляд $y = \pm \frac{5}{12} x$.

Розв'язок.

Так як відстань між вершинами гіперболи дорівнює $2a$, то $2a = 48$ або $a = 24$.

Асимптоти гіперболи мають рівняння $y = \pm \frac{b}{a} x$. Отже, $\frac{b}{a} = \frac{5}{12}$, звідки $b = \frac{24 \cdot 5}{12}$ або $b = 10$. Таким чином, рівняння шуканої гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1.$$

4. Парабола

Означення 10.4. Параболою називається множина точок, для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки площини, що називається фокусом, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, яка не проходить через фокус і називається директрисою.

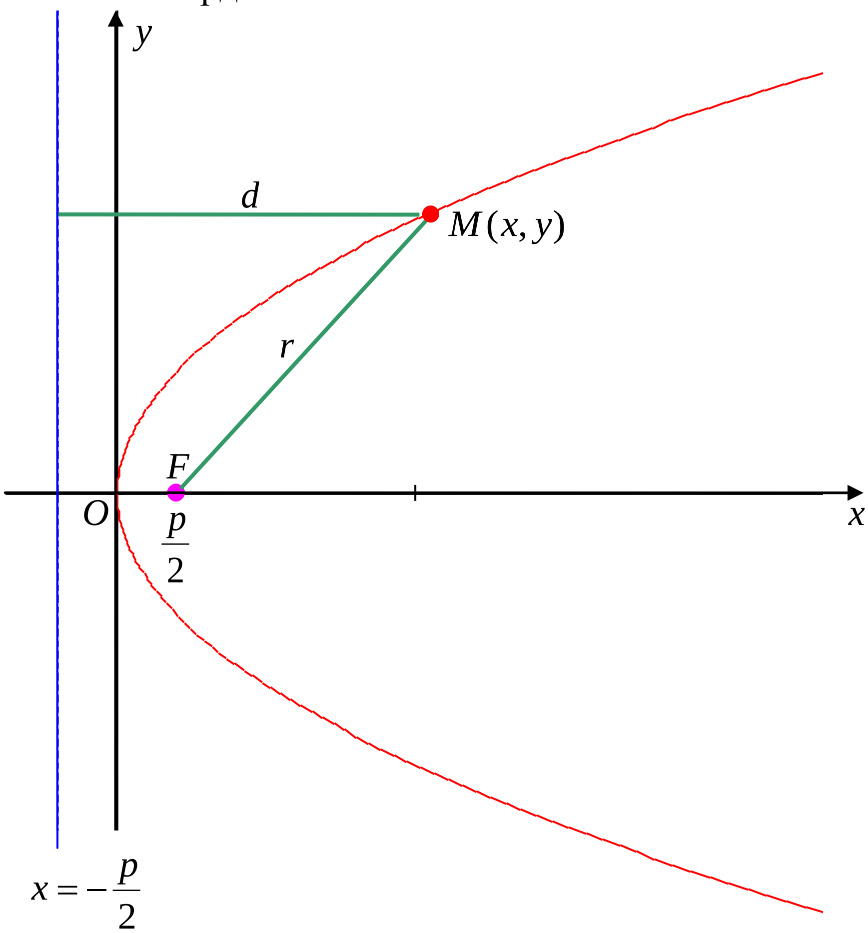
Відстань p від фокуса параболи до її директриси називається параметром параболи.

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрані так, що фокус знаходиться в точці $F(p/2{,}0)$, а директриса перпендикулярна до осі Ox і має рівняння $x=-\dfrac{p}{2}$, то рівняння параболи має вигляд

$$y^2 = 2px. \tag{5}$$

Рівняння (5) називається канонічним рівнянням параболи.

Парабола має одну вісь симетрії, вісь симетрії параболи називається віссю параболи. Точка перетину параболи з віссю симетрії називається її вершиною. Для параболи, яка задана рівнянням (5), віссю є вісь Ox, а вершиною – початок координат.



Фокальний радіус r довільної точки $M(x,y)$ параболи (тобто довжина відрізка FM) може бути обчислений за формулою

$$r = x + \frac{p}{2},$$

де x – абсциса точки M. Якщо директриса параболи – пряма $x = p/2$, а фокус – точка $F(-p/2{,}0)$, рівняння параболи має вигляд $y^2 = -2px$. У випадку, якщо директриса параболи – пряма $y=-p/2$, а фокус – точка $F(0,p/2)$ рівняння параболи має вигляд $x^2=2py$.

Рівняння дотичної до параболи $y^2=2px$ в точці $M(x_1,y_1)$ параболи має вигляд

$$yy_1=p(x+x_1).$$

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрані так, що фокус параболи знаходиться в точці $F(x_0+p/2,y_0)$, а директриса перпендикулярна до осі Ox і має рівняння $x=x_0-\dfrac{p}{2}$, то рівняння параболи має вигляд

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0).$$

Зауваження 10.1. Нехай r – відстань від довільної точки параболи до фокуса (фокальний радіус), d – відстань від цієї ж точки до директриси. Тоді за означенням параболи $r=d$. Звідси згідно з твердженням теорем 10.2 та 10.3 вважають, що ексцентриситет параболи $\varepsilon=r/d=1$.

Приклад 10.3. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, яка симетрична відносно осі Ox і відтинає від прямої $y=2\sqrt{2}x$ хорду довжиною $3/4$.

Розв'язок.

Рівняння шуканої параболи має вигляд $y^2=\pm 2px$. Для визначення координат точок перетину прямої і параболи розв'яжемо систему рівнянь (для випадку $y^2=2px$)

$$\begin{cases} y^2=2px, \\ y=2\sqrt{2}x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2/2p, \\ y=2\sqrt{2}\,y^2/2p, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2/2p, \\ \left[\begin{array}{l} y=0, \\ y=p/\sqrt{2}, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=p/4, \\ y=p/\sqrt{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким чином, одержимо дві точки перетину прямої з параболою $O(0,0)$ і $M(p/4,p/\sqrt{2})$.

Довжину хорди обчислимо як відстань між точками O і M

$$\frac{3}{4}=\sqrt{\frac{p^2}{16}+\frac{p^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{3}{4}=\sqrt{\frac{9}{16}p^2} \Leftrightarrow \frac{3}{4}=\frac{3}{4}p.$$

Звідки $p=1$ або $2p=2$. Отже, шукане рівняння параболи має вигляд $y^2=2x$. Аналогічно, у випадку параболи $y^2=-2px$, одержимо $y^2=-2x$.