Лекція №2.

Тема: Визначники.

План лекції:

1. Визначники другого та третього порядку та їх властивості
2. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.
3. Визначники вищих порядків (самостійне опрацювання).

1. <u>Визначники другого та третього порядку та їх властивості</u>

Розглянемо квадратну матрицю 2-го порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Означення 2.1. Визначником (детермінантом) другого порядку, складеним з елементів цієї матриці A, називається число, що дорівнює $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, яке позначається

$$|A|=\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Розглянемо квадратну матрицю 3-го порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

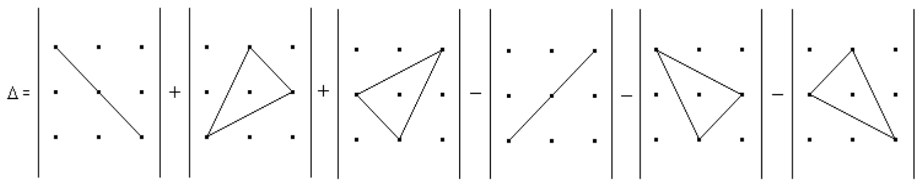
Означення 2.2. Детермінантом 3-го порядку, складеним із елементів цієї матриці A, називається число, що дорівнює

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}, \qquad (2.1)$$

яке позначається

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Вираз (2.1) складений за таким правилом (правило трикутника): добуток елементів, розміщених вздовж головної діагоналі і два добутки елементів, що стоять у вершинах двох рівнобедрених трикутників із основами паралельними головній діагоналі і з вершинами в протилежному куті, беруться із знаком плюс. Три добутки, що складені за тим же правилом, але відносно побічної діагоналі, беруться із знаком мінус:



Властивості детермінантів 2-го і 3-го порядку.

Властивість 1. Величина детермінанта не зміниться, якщо замінити кожний його рядок стовпцем із тим же номером, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Властивість 2. Перестановка двох рядків (стовпців) детермінанта рівносильна множенню його на (-1).

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Властивість 3. Детермінант, який має два однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю.

Властивість 4. Множення всіх елементів одного стовпця (рядка) детермінанта на довільне число k рівносильне множенню детермінанта на це число.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наслідок 1. Якщо всі елементи якогось рядка (стовпця) рівні нулю, то і детермінант дорівнює нулю.

Наслідок 2. Детермінант, в якому відповідні елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, дорівнює нулю.

Властивість 5. Якщо кожний елемент i-го рядка (i-го стовпця, де i=1,2,3) є сума двох доданків, то детермінант дорівнює сумі двох детермінантів, у першого з яких i-й рядок (i-й стовпець) складається з перших доданків, а у другого - з других; інші елементи усіх трьох детермінантів однакові.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Властивість 6. Величина детермінанта не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на один і той же множник.

2. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.

Означення 2.3. Мінором елемента a_{ij} називається детермінант, порядок якого на одиницю менший порядку даного детермінанта, утворений з даного детермінанта викреслюванням i-го рядка і j-го стовпця, на перетині яких розміщений елемент a_{ij}. Мінор елемента a_{ij} позначається через Δ_{ij}.

Наприклад: Для визначника $\varDelta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ мінор елемента a_{11} рівний $\varDelta_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$, мінор елемента a_{22} рівний $\varDelta_{22}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$.

Означення 2.4. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток мінора Δ_{ij} на величину $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\varDelta_{ij}\,.$$

Наприклад: Для визначника $\varDelta=\begin{vmatrix}0&1&-2\\2&3&-1\\5&4&-3\end{vmatrix}$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&-2\\4&-3\end{vmatrix}=(-1)\div(-3+8)=-5\,.$$

Теорема 1. Детермінант дорівнює сумі добутків елементів рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Доведення:

Доведемо, що $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$.

Розкладемо визначник за правилом трикутника:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

Теорема 2. Сума добутків елементів довільного рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Доведення: Розглянемо для визначника третього порядку суму добутків елементів першого рядка на алгебраїчні доповнення другого рядка.

$$\varDelta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$a_{11}\cdot A_{21}+a_{12.}\cdot A_{22}+a_{13}\cdot A_{23}=a_{11}\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12.}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+$$

$$+a_{13}\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=-a_{11}(a_{12}\cdot a_{33}-a_{13}\cdot a_{32})+a_{12}(a_{11}\cdot a_{33}-a_{13}\cdot a_{31})-$$

$$-a_{13}(a_{11}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{31})=0$$

3. Визначники вищих порядків.

Доведена вище **теорема 1** про розклад визначника на суму добутків елементів рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення, дає змогу ввести означення визначника довільного порядку.

Означення 2.5. Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Всі розглянуті вище властивості визначників третього порядку справджуються для визначників будь-якого порядку.

Розглянемо, наприклад, визначник четвертого порядку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}.$$

Оскільки, у даному випадку, всі алгебраїчні доповнення є визначниками третього порядку. То дані обрахунки не складуть великих труднощів. Проте, такий спосіб є надзвичайно громіздким для, наприклад для визначника п'ятого порядку. Тому на практиці спочатку за допомогою властивості 6 перетворюють визначник так, щоб у деякому рядку (стовпці) всі елементи, крім одного, стали нулями. Розкладаючи тоді визначник **за теоремою 1** у сумі дістанемо лише один додано. Тому що всі інші будуть добутками нуля на алгебраїчне доповнення.

Наприклад.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \textit{Домножимо перший рядок на } (-1) \textit{ і додамо до} \\ \textit{відповідних елементів другого рядка} \end{array}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \textit{Додомо перший рядок з відповідними елементами} \\ \textit{третього рядка} \end{array}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \textit{Домножимо перший рядок на } (-2) \textit{ і додамо до} \\ \textit{відповідних елементів четвертого рядка} \end{array}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left[\textit{Розкладемо визначник за першим стовпцем}\right] = 1 \cdot A_{11} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 6 - 4 - 2 - 8 - 3 = -21$$