Лекція №3.

Тема: Обернена матриця.

План лекції:

1. Обернена матриця.
2. Матричні рівняння.

1. <u>Обернена матриця.</u>

Нехай A – квадратна матриця порядку n.

Означення 3.1. Квадратна матриця A^{-1} порядку *n* називається оберненою до матриці *A*, якщо $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$, де *E* – одинична матриця порядку *n*.

Означення 3.2. Квадратна матриця A порядку *n* називається особливою (виродженою), якщо її детермінант дорівнює нулю. Якщо $|A|\neq 0$, то A називається неособливою (не виродженою).

Теорема 3.1. Особливі матриці обернених матриць не мають. Кожна неособлива матриця має єдину обернену матрицю.

Якщо $|A|\neq 0$, то обернена матриця A^{-1} має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{11} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n11} & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

де A_{ij} (*i*=1, 2, ..., *n*; *j*=1, 2, ..., *n*) – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A.

2. <u>Матричні рівняння.</u>

Означення 3.3. Рівність, що містить невідому матрицю, яка позначена буквою, називається матричним рівнянням.

Означення 3.4. Коренем матричного рівняння називається таке значення невідомої матриці, при якому це матричне рівняння перетворюється на вірну рівність.

Розв'язати матричне рівняння означає знайти усі його корені, або довести, що їх не існує. При розв'язуванні матричних рівнянь використовують такі їх властивості:

1) одночасне множення обох частин матричного рівняння на неособливу матрицю можливе або тільки справа, або тільки зліва;
2) множення матричного рівняння на обернену матрицю до матриць, що входять у рівняння, можливе або тільки справа, або тільки зліва.

Якщо A, B, C - відомі квадратні матриці , а X – невідома матриця першого степеня, тобто, над невідомою матрицею не виконується арифметична дія піднесення до степеня, то матричне рівняння називають лінійним.

Лінійні матричні рівняння можуть:

1) не мати розв'язків;
2) мати обмежену кількість розв'язків;
3) мати безліч розв'язків.

Надалі розглядаємо лише лінійні матричні рівняння.

Приклад 3.1: Знайти невідому матрицю X у рівнянні $X \cdot A = B$, якщо
$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Розв'язок:
Якщо матриця A неособлива, то існує обернена A^{-1}. Помноживши обидві сторони рівняння справа на A^{-1} знайдемо невідому матрицю X.

$$X \cdot A = B$$
$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$
$$X \cdot E = B \cdot A^{-1}$$
$$X = B \cdot A^{-1}$$

Знайдемо визначник матриці A: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$. Матриця A особлива, тому не існує оберненої матриці A^{-1} і дане матричне рівняння не має розв'язку. Це можна зрозуміти і із матричного рівняння, яке отримаємо після множення двох матриць у лівій частині даного рівняння:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a + 2b & a + b \\ 2c + 2d & c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Згідно останньої рівності двох матриць одночасно не можуть виконуватися такі дві рівності: $2a + 2b = 1$ і $a + b = 0$. Тому не існує матриці, що задовольняє дане рівняння.

Приклад 3.2: Знайти невідому матрицю X із рівняння $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Розв'язок. Запишемо дане рівняння коротко $A \cdot X = B$. Якщо матриця A неособлива, то $X = A^{-1} \cdot B$.

Обчислимо детермінант матриці

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

отже, матриця A неособлива.

Знаходимо матрицю A^{-1}, обернену до A. Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$, $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3$, $A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$,

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -7$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6$, $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -1$,

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -6$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{11} & \cdots & A_{n2} \\ . & . & \cdots & . \\ A_{1n} & A_{2n11} & & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Знайдемо матрицю X : $X = A^{-1} \cdot B \cdot == \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$