Лекція №4.

Тема: Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛР).

План лекції:

1. Основні означення.
2. Матричний запис СЛР та матричний метод їх розв'язування (самостійне опрацювання).
3. Метод Крамера розв'язування СЛР (самостійне опрацювання).
4. Розв'язування СЛР методом Гаусса.

1. Основні означення.

Означення 4.1. Системою m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, x_3..x_n$ називається система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.1}$$

Сталі множники a_{ij} $(i = 1,2,..m;\ j = 1,2,..n)$ біля невідомих називаються коефіцієнтами, а числа b_i – вільними членами системи.

Означення 4.2. Система рівнянь (4.1) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени системи дорівнюють нулю $(b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0)$.

Означення 4.3. Система рівнянь (4.1) називається *неоднорідною*, якщо хоча б один із вільних членів b_i не рівний нулю.

Означення 4.4. Множина чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається впорядкованою, якщо вказано порядок слідування цих чисел. (Наприклад, множина натуральних чисел).

Означення 4.5. Упорядкований набір n чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ називається *розв'язком* системи (4.1), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ усі рівняння системи перетворюються на тотожності.

Означення 4.6. СЛР називають *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку**.**

Означення 4.7. Сумісна СЛР називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок і невизначеною, якщо вона має більше ніж один розв'язок.

Означення 4.8. Дві системи лінійних рівнянь називаються еквівалентними, якщо вони мають одну і ту ж множину розв'язків.

2. Матричний запис СЛР та їх розв'язування (самостійне опрацювання).

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4.2}$$

Введемо позначення:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – основна матриця СЛР,

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ – матриця стовпець невідомих СЛР, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ – матриця стовпець вільних членів СЛР.

Тоді СЛР можна записати у матричній формі: $A\cdot X=B$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

Якщо $|A|\neq 0$, то дану СЛР можна розв’язати як матричне рівняння. Помноживши рівність $A\cdot X=B$ зліва на A^{-1} знайдемо невідому матрицю

$$X=A^{-1}\cdot B,$$

елементи якої і є значеннями невідомих СЛР.

Приклад 4.1. Розв’язати СЛР матричним методом:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=36, \\ x_1-x_2+x_3=13, \\ -x_1+x_2+x_3=7. \end{cases}$$

Розв’язок. Запишемо СЛР у матричній формі: $A\cdot X=B$, де

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 36 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо детермінант основної матриці A: $|A|=\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4\neq 0.$

Отже, матриця A неособлива.

Знаходимо матрицю A^{-1}, обернену до A. Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2$, $A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0$,

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-2$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2$,

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-2$, $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2$.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Знайдемо матрицю X :

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B\cdot=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}36\\13\\7\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-98\\-86\\-40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24{,}5\\-21{,}5\\10\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=-24{,}5$, $x_2=-21{,}5$, $x_3=10$.

3. <u>Метод Крамера розв’язування СЛР (самостійне опрацювання).</u>

Позначимо визначник основної матриці СЛР (4.2) через

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1(j-1)}&a_{1j}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2(j-1)}&a_{2j}&\dots&a_{2n}\\.&.&\dots&.&.&\dots&.\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{n(j-1)}&a_{nj}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

Замінимо j-й стовпець в Δ стовпцем вільних членів. Отриманий визначник позначимо Δ_j, тобто

$$\Delta_j=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1(j-1)}&b_1&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2(j-1)}&b_2&\dots&a_{2n}\\.&.&\dots&.&.&\dots&.\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{n(j-1)}&b_n&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник Δ_j за алгебраїчними доповненнями j-го стовпця: $\Delta_j=b_1\cdot A_{1j}+b_2\cdot A_{21j}+\ldots+b_n\cdot A_{nj}$. До того ж треба відмітити, що алгебраїчні доповнення для елементів j-го стовпця визначників Δ і Δ_j співпадають.

Теорема 4.1. (Правило Крамера). Якщо визначник основної матриці СЛР (4.2) відмінний від нуля, то ця система має єдиний розв’язок, який можна знайти за формулами Крамера:

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta},\ j=1,2,..n.$$

Доведення:

1. <u>Існування розв’язку.</u> Матриця стовпець $X=A^{-1}\cdot B$ є розв’язок СЛР, оскільки:

$A\cdot X=A\left(A^{-1}\cdot B\right)$

$A\cdot X=\left(A\cdot A^{-1}\right)\cdot B$

$A\cdot X=E\cdot B$

$A\cdot X=B$ – матричний запис СЛР.

2. <u>Єдиність розв’язку.</u> Нехай X_0 інший розв’язок СЛР. Покажемо, що $X=A^{-1}\cdot B$ співпадає з X_0. Якщо X_0 – розв’язок СЛР, то має місце тотожність $A\cdot X_0=B$. Помножимо тотожність на A^{-1} зліва:

$$A^{-1}\cdot\left(A\cdot X_0\right)=A^{-1}B$$

$$\left(A^{-1}\cdot A\right)\cdot X_0=A^{-1}B$$

$$E\cdot X_0=A^{-1}B$$

$$X_0=X$$

Отже, інший розв’язок СЛР співпадає з X, тобто $X=A^{-1}\cdot B$ єдиний розв’язок СЛР.

3. <u>Формули Крамера.</u> Матриця обернена до A має вигляд

$$A^{-1}=\frac{1}{\varDelta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обчислимо X .

$$X = A^{-1}\cdot B=\frac{1}{\varDelta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\varDelta}\begin{pmatrix} b_1\cdot A_{11}+b_2\cdot A_{21}+\dots+b_n\cdot A_{n1} \\ b_1\cdot A_{12}+b_2\cdot A_{22}+\dots+b_n\cdot A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1\cdot A_{1n}+b_2\cdot A_{2n}+\dots+b_n\cdot A_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\varDelta}\begin{pmatrix} \varDelta_1 \\ \varDelta_2 \\ . \\ . \\ \varDelta_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\varDelta_1}{\varDelta} \\ \frac{\varDelta_2}{\varDelta} \\ . \\ . \\ \frac{\varDelta_n}{\varDelta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}\Rightarrow x_1=\frac{\varDelta_1}{\varDelta},\ x_2=\frac{\varDelta_2}{\varDelta},\dots x_n=\frac{\varDelta_n}{\varDelta}.$$

Приклад 4.2. Розв’язати СЛР методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1-x_2+\ x_3=5, \\ 2x_1+x_2+\ x_3=6, \\ x_1+x_2+2x_3=4. \end{cases}$$

Розв’язок. Знайдемо визначник СЛР $\varDelta$:

$$\varDelta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+2-1-1-1+4=5\neq 0.$$

Обчислимо визначники $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$:

$$\varDelta_1=\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}=10+6-4-4-5+12=15,$$

$$\varDelta_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=12+8+5-6-4-20=-5,$$

$$\varDelta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=4+10-6-5-6+8=5.$$

За формулами Крамера визначимо значення невідомих x_1, x_2, x_3.

$$x_1=\frac{\varDelta_1}{\varDelta}=\frac{15}{5}=3,\ x_2=\frac{\varDelta_{21}}{\varDelta}=\frac{-5}{5}=-1,\ x_3=\frac{\varDelta_3}{\varDelta}=\frac{5}{5}=1.$$

4. <u>Розв’язування СЛР методом Гаусса.</u>

Метод Гаусса є універсальним методом розв’язування СЛР. Його переваги:

1) найменш трудомісткий (особливо для систем великих розмірностей);
2) дозволяє завжди встановлювати сумісність системи та розв’язувати як визначені, так і невизначені системи (метод Крамера та матричний метод

можна застосовувати лише коли $|A| \neq 0$ і тільки для СЛР з однаковою кількість рівнянь та невідомих).

Метод Гаусса – це метод послідовного виключення невідомих, який базується на елементарних перетвореннях системи.

Елементарні перетворення системи:

а) помноження рядка на ненульове число;

б) додавання одного рядка до іншого;

в) перестановка двох рядків;

г) викреслювання або дописування нульового рядка.

Доведено, що виконання елементарних перетворень системи не змінює множину розв'язків цієї системи.

Нехай задано СЛР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Розглянемо алгоритм методу Гаусса розв'язування цієї системи. Виконувати перетворення на практиці зручно не над самою системою, а над її розширеною матрицею

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \ldots & . & . \\ . & . & \ldots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

$\tilde{A}$ містить у собі всю інформацію про СЛР. Отже, будь-якій СЛР можна поставити у відповідність її розширену матрицю. І навпаки: будь-якій матриці, що містить більше одного стовпця, можна поставити у відповідність СЛР. Використання розширеної матриці зменшує об'єм записів (не потрібно писати символи арифметичних операцій, змінні, символи рівності), тому алгоритм методу Гаусса запишемо в термінах розширеної матриці.

Метод Гаусса складається з двох етапів: «прямий хід» та «зворотній хід».

Розглянемо перший крок прямого ходу методу Гаусса:

1. Якщо $a_{11} = 0$, то переставимо рядки так, щоб цей елемент був відмінний від нуля (оскільки в системі присутня змінна x_1, то в першому стовпчику існує ненульовий елемент; він має опинитися в позиції a_{11}).
2. Помножимо перший рядок на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ та додамо до другого рядка, потім на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ та додамо до третього і т.д. $(m-1)$ раз. Дістанемо матрицю виду

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

Другий крок полягає у повторенні наведених вище двох пунктів для частини матриці (4.3) без першого рядка та лідируючих нульових стовпчиків.

На третьому кроці з розгляду виключається третій рядок і т.д. Прямий хід методу Гаусса завершується, коли матриця набуває трапецієподібного вигляду

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} a''_{11} & \dots & a''_{1k} & \dots & a''_{1l} & \dots & a''_{1s} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\ 0 & \dots & a''_{2k} & \dots & a''_{2l} & \dots & a''_{2s} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a''_{3l} & \dots & a''_{3s} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a''_{rs} & \dots & a''_{rn} & b''_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b''_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots. & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b''_m \end{array}\right) \qquad (4.4)$$

або трикутного вигляду

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} & \dots & a''_{1(n-1)} & a''_{1n} & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \dots & a''_{2(n-1)} & a''_{2n} & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3(n-1)} & a''_{3n} & b''_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a''_{(n-1)(n-1)} & a''_{(n-1)n} & b''_{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a''_{nn} & b''_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (4.5)$$

У випадку отримання трапецієподібної матриці можливі два випадки:

1. Якщо у матриці (4.4) хоча б один з елементів $b''_{r+1}, \dots, b''_m$ відмінний від нуля, тобто міститься рядок виду $(00...00000|b_k)$, то це означає, що в перетвореній системі рівнянь міститься рівняння виду

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_k, \text{ де } b_k \neq 0.$$

Таке рівняння розв'язку не має, отже і вся система розв'язку не має. Тобто СЛР є не сумісною.

Приклад 4.3. Розв'язати СЛР методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо розширену матрицю СЛР і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до трапецієподібного вигляду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{lll} \cdot(-2) & \cdot(-1) & \cdot 1 \\ +\hookleftarrow & & \\ & +\hookleftarrow & \\ & & +\hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ +\hookleftarrow \\ +\hookleftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right).$$

СЛР розв'язку не має.

2. Якщо у матриці (4.4) всі елементи $b''_{r+1}=b''_{r+2}=\ldots=b''_m=0$, то система має розв'язки. Щоб знайти ці розв'язки записуємо СЛР, що відповідає матриці (4.4)

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}a''_{11} & \ldots & a''_{1k} & \ldots & a''_{1l} & \ldots & a''_{1s} & \ldots & a''_{1n} & b''_1\\ 0 & \ldots & a''_{2k} & \ldots & a''_{2l} & \ldots & a''_{2s} & \ldots & a''_{2n} & b''_2\\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & a''_{3l} & \ldots & a''_{3s} & \ldots & a''_{3n} & b''_3\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & a''_{rs} & \ldots & a''_{rn} & b''_r\\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & 0 & \ldots. & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0\end{array}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a''_{11}x_1+\ldots+a''_{1k}x_k+\ldots+a''_{1l}x_l+\ldots+a''_{1s}x_s+\ldots+a''_{1n}x_n=b''_1,\\ \qquad a''_{2k}x_k+\ldots+a''_{2l}x_l+\ldots+a''_{2s}x_s+\ldots+a''_{2n}x_n=b''_2,\\ \qquad\qquad a''_{3l}x_l+\ldots+a''_{3s}x_s+\ldots+a''_{3n}x_n=b''_3,\\ \qquad\qquad\qquad \ldots..\\ \qquad\qquad\qquad a''_{rs}x_s+\ldots+a''_{rn}x_n=b''_r.\end{cases}$$

В отриманій системі невідомі $x_1, x_k, x_l, ..x_s$ (ті невідомі, з яких починаються рядки) називають базисними невідомими, а $x_{s+1}, x_{s+2},\ldots,x_n$ – вільними невідомими. Піднімаючись по СЛР знизу вгору, виражають базисні невідомі через вільні (зворотній хід методу Гаусса). Розв'язок системи запишеться у вигляді рівностей, що пов'язують між собою базисні невідомі з вільними. Вільним невідомим можна надавати довільних значень, отримуючи кожного разу інший набір чисел, що є розв'язком СЛР. Звідси слідує, що в цьому випадку СЛР має безліч розв'язків.

Приклад 4.4. Розв'язати СЛР методом Гаусса.

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3-x_4=-3,\\ 2x_1-3x_2-4x_3+x_4=1,\\ x_1+7x_3-4x_4=-10.\end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо розширену матрицю СЛР і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до трапецієподібного вигляду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & -1 & -3\\ 2 & -3 & -4 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 7 & -4 & -10\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-2)\quad\cdot(-1)\\ +\hookleftarrow\\ \qquad\quad +\hookleftarrow\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & -1 & -3\\ 0 & -1 & -6 & 3 & 7\\ 0 & 1 & 6 & -3 & -7\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot 1\\ +\hookleftarrow\end{array}\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & -1 & -3\\ 0 & -1 & -6 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & -1 & -3\\ 0 & -1 & -6 & 3 & 7\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_3-x_4=-3,\\ -x_2-6x_3+3x_4=7.\end{cases}$$

СЛР має безліч розв'язків. x_1 та x_2 - базисні невідомі, x_3, x_4 - вільні невідомі. Виразимо базисні невідомі через вільні.

$$x_2=-7-6x_3+3x_4$$

$$x_1=x_2-x_3+x_4-3\Rightarrow x_1=-7-6x_3+3x_4-x_3+x_4-3\Rightarrow x_1=-10-7x_3+x_4$$

Отже, розв'язки СЛР: $\begin{cases} x_1 = -10 - 7x_3 + x_4, \\ x_2 = -7 - 6x_3 + 3x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$

Якщо в результаті прямого ходу методу Гаусса отримуємо матрицю виду (4.5), то відновлена за нею СЛР має вигляд

$$\begin{cases} a''_{11}x_1 + a''_{12}x_2 + \ldots + a''_{1n}x_n = b''_1, \\ \qquad a''_{22}x_2 + \ldots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \qquad\qquad \ldots.. \\ \qquad\qquad a''_{nn}x_n = b''_n. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо $x_n = \dfrac{b''_n}{a''_{nn}}$ та підставляємо це значення у попереднє рівняння. Аналогічно, піднімаючись по рівняннях знизу вгору, знаходимо значення всіх невідомих. Отже, в цьому випадку система має єдиний розв'язок.

Приклад 4.5. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Розв'язок. Розширена матриця системи має вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 7 & 1 & -2 & 12 \end{array}\right).$$

Виконає прямий хід методу Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 7 & 1 & -2 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -2 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 15 & -16 & 47 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Матриця набула трикутного вигляду, отже вона сумісна і має єдиний розв'язок. Знайдемо його, записавши перетворену систему за одержаною матрицю:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ \qquad 5x_2 - 5x_3 = 15, \\ \qquad\qquad -x_3 = 2. \end{cases}$$

Звідки

$$x_3 = -2,\ x_2 = 3 + x_3 = 1,\ x_1 = -5 + 2x_2 - 2x_3 = 1.$$