Лекція №5.

Тема: Вектори. Лінійні операції над векторами.

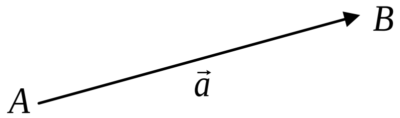
План лекції:

1. Скалярні та векторні величини. Основні означення.
2. Лінійні дії над векторами.
3. Лінійна залежність векторів. Базис. Афінна система координат. Розклад вектора по базису.

1. <u>Скалярні та векторні величини. Основні означення.</u>

Багато фізичних величин визначаються лише числовим значенням (об'єм, густина, температура, тощо). Такі величина називаються *скалярними.* Проте, є фізичні величини, які крім числового значення мають ще й напрям (сила, напруженість магнітного поля, тощо). Такі величини називають *векторними.*

Означення 5.1. Нехай задано відрізок AB. Якщо вказано, що т. A є початковою, а т. B – кінцевою, то маємо напрямлений відрізок AB, який називається *вектором* і позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

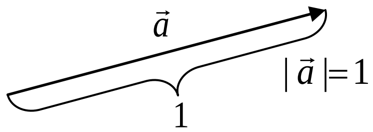


Означення 5.2. Довжина відрізка AB називається *модулем* або *довжиною* вектора $\overrightarrow{AB}$ і позначається $|\overrightarrow{AB}|$.

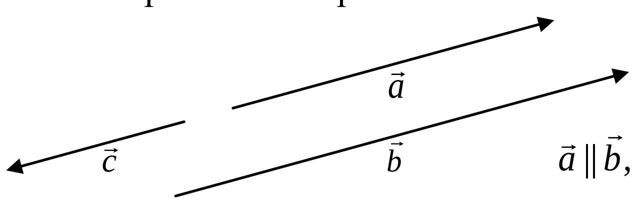
Означення 5.3. Якщо початок і кінець вектора збігаються, то вектор називається *нульовим* і позначається $\overline{O}$.

Зауваження. Довжина нульового вектора дорівнює нулю, а напрям невизначений. Тому за напрям нульового вектора можна взяти довільний наперед заданий напрямок.

Означення 5.4. Вектор називається *одиничним*, якщо його довжина дорівнює одиниці.

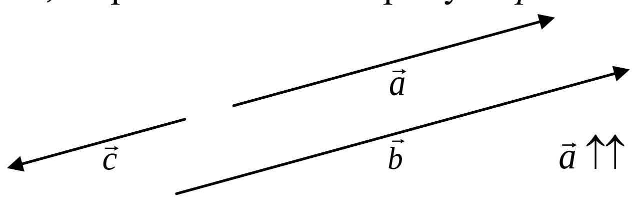


Означення 5.5. Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій, або на паралельних прямих.



$\vec{a} \parallel \vec{b},\ \vec{a} \parallel \vec{c},\ \vec{b} \parallel \vec{c}$

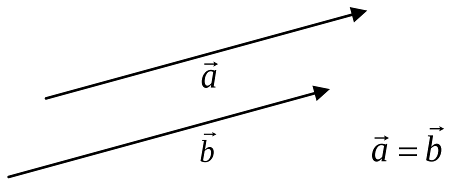
Означення 5.6. Вектори однакового напряму називають *співнапрямленими,* а протилежного напряму – *протилежно напрямленими*.



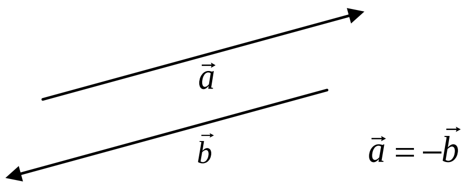
$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b},\ \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$

Зауваження. Колінеарні вектори є або співнапрямленими, або протилежно напрямленими.

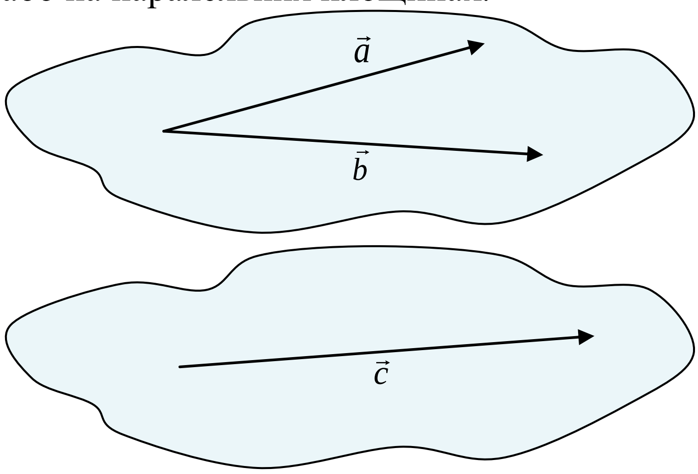
Означення 5.7. Співнапрямлені вектори однакової довжини називаються *рівними*.



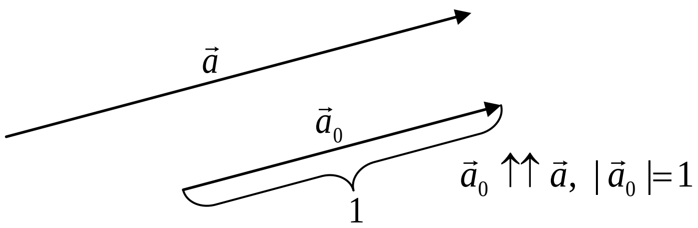
Означення 5.8. Протилежно напрямлені вектори однакової довжини називаються протилежними. Вектор, протилежний до $\vec{a}$, позначається як $-\vec{a}$.



Означення 5.9. Вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать на одній площині, або на паралельних площинах.



Означення 5.10. Одиничний вектор співнапрямлений з вектором $\vec{a}$ називається *ортом* вектора $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}_0$.



Зауваження. З означення рівності двох векторів випливає, що поняття вектора рівносильне поняттю паралельного перенесення.

2. <u>Лінійні операції над векторами.</u>

Під лінійними операціями над векторами розуміють операції додавання векторів і множення вектора на дійсне число.

Додавання векторів

Означення 5.11. Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який випущено з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$, за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис. 5.1).

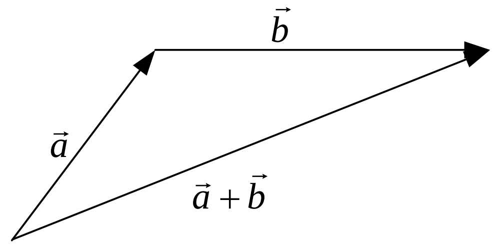


Рис. 5.1. Правило трикутника додавання векторів.

Поряд із «правилом трикутника», яке сформульоване вище, часто користуються рівносильним йому «правилом паралелограма». Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ приведені до спільного початку і на них побудовано паралелограм, то сума $\vec{a}+\vec{b}$ є вектор, що збігається з діагоналлю цього паралелограма, яка виходить із спільного початку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 5.2).

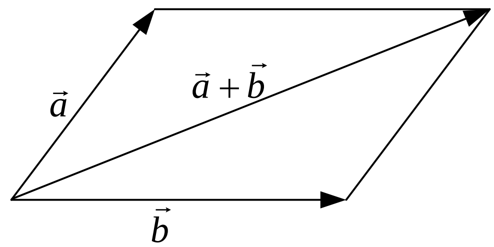


Рис. 5.2. Правило паралелограма додавання векторів.

Зауваження 2.3. Сума кількох векторів може бути знайдена за «правилом многокутника». Сумою кількох векторів є вектор, початок якого збігається з початком першого доданка, а кінець з кінцем останнього, за умови, що початок кожного наступного доданка збігається з кінцем попереднього (рис. 5.3).

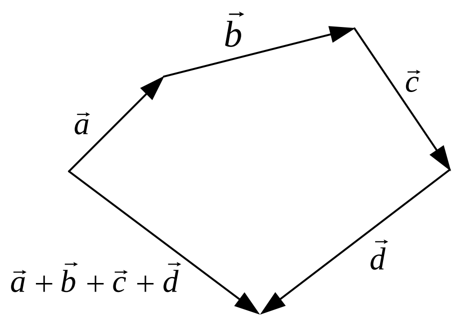


Рис. 5.3. Правило многокутника додавання векторів.

Властивості операції додавання векторів:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*комутативна властивість*).
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (*асоціативна властивість*).
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.
4. Для кожного вектора $\vec{a}$ існує протилежний вектор $-\vec{a}$ такий, що $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Множення вектора на число.

Означення 5.12. Добутком $\alpha\vec{a}=\vec{b}$ (або $\vec{a}\alpha$) ненульового вектора $\vec{a}$ на ненульове дійсне число α називається вектор $\vec{b}$, модуль якого дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на модуль числа α, тобто $|\vec{a}\alpha|=|\alpha\vec{a}|=|\alpha||\vec{a}|$, і співнапрямлений з $\vec{a}$, якщо $\alpha>0$, та протилежно напрямлений з $\vec{a}$, якщо $\alpha<0$. Якщо $\alpha=0$ або $\vec{a}=\vec{0}$, то $\alpha\vec{a}=\vec{0}$.

Властивості операції множення вектора на число:

1. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (*дистрибутивна властивість числового множника відносно суми векторів*).
2. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (*дистрибутивна властивість векторного множника відносно суми чисел*).
3. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$ (*асоціативна властивість*).

Означення 5.13. Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перший із яких називається зменшуваним, а другий – від'ємником, називається вектор (рис. 5.4)

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

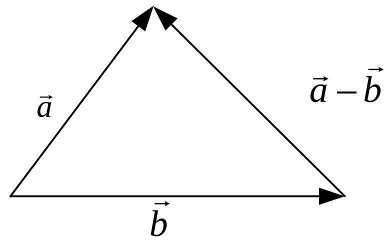


Рис.5.3. Правило трикутника віднімання векторів.

Означення 5.14. Лінійною комбінацією *n* векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ називається сума добутків цих векторів на довільні дійсні числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, тобто вираз, що має вигляд

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n.$$

Теорема 5.1. Якщо вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$ і $|\vec{a}|\neq 0$, то існує дійсне число α таке, що $\vec{b}=\alpha\vec{a}$.

3. <u>Лінійна залежність векторів. Базис. Афінна система координат. Розклад вектора по базису.</u>

Означення 5.15. Вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ називаються лінійно залежними, якщо знайдуться такі дійсні числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, з яких хоч би одне відмінне від нуля, і такі, що лінійна комбінація векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ з цими числами дорівнює нулю, тобто

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}.$$

Означення 5.16. Вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ називаються лінійно незалежними, якщо рівність нулю їх лінійної комбінації з числами $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ можлива лише в випадку, коли всі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ дорівнюють нулю.

Теорема 5.2. Якщо хоч би один із векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ нульовий, то ці вектори є лінійно залежними.

Теорема 5.3. Якщо серед n векторів які-небудь n-1 вектори – лінійно залежні, то і всі n векторів лінійно залежні.

Теорема 5.4. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших.

Теорема 5.5. Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність.

Наслідок 1. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то вони лінійно незалежні.

Наслідок 2. Серед двох неколінеарних векторів не може бути нульового вектора.

Теорема 5.6. Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності трьох векторів є їх компланарність.

Наслідок 1. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ не компланарні, то вони лінійно незалежні.

Наслідок 2. Серед трьох некомпланарних векторів не може бути двох колінеарних векторів і не може бути ні одного нульового вектора.

Теорема 5.7. Будь-які чотири вектори в звичайному просторі лінійно залежні.

Поняття базису. Афінна система координат

Означення 5.17. Лінійно незалежна система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ утворює базис деякого простору, якщо довільний вектор $\vec{b}$ цього простору може бути представлений у вигляді деякої лінійної комбінації векторів системи

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n .$$

Кількість n векторів у базисі називається розмірністю простору.

Справедливі такі твердження:

1) будь-який ненульовий вектор $\vec{a}$ прямої утворює базис в цій прямій (пряма є простір розмірності 1);

1) будь-яка пара неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які лежать в даній площині, утворюють базис в цій площині (площина є простір розмірності 2);

2) будь-яка трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворює базис у звичайному просторі (звичайний простір має розмірність 3).

Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – довільний базис в просторі, тобто довільна трійка некомпланарних векторів. Тоді (за означенням базису) для будь-якого вектора $\vec{d}$ знайдуться такі дійсні числа α, β, γ, що виконується рівність

$$\vec{d} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} . \tag{5.1}$$

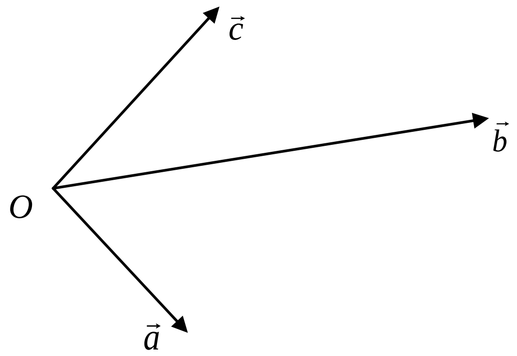
Рівність (5.1) називається розкладом вектора $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, а числа α, β, γ координатами вектора $\vec{d}$ відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Звичайно пишуть так $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Теорема 5.8. Вектор $\vec{d}$ може бути єдиним способом розкладеним за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ тобто координати кожного вектора $\vec{d}$ відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

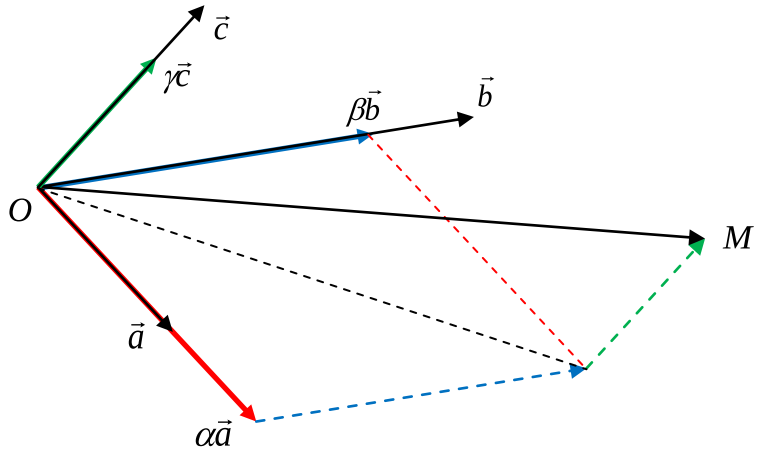
визначаються однозначно.

Теорема 5.9. При додаванні двох векторів їх координати (відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) додаються. При множенні вектора на будь-яке число α всі його координати помножаються на це число. У випадку площини мають місце аналогічні твердження.

Афінна система координат в просторі визначається заданням базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і деякої точки *O*, яка називається початком координат.



Афінними координатами будь-якої точки M називаються координати вектора $\overrightarrow{OM}$ (відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$), тобто числа α, β, γ такі, що $\vec{OM} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Запис $M(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ означає, що числа α, β, γ є координатами точки *M*. Вектор $\vec{OM}$ називається радіус-вектором точки *M*.



Якщо дано точки $M_1(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ і $M_2(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (\alpha_2 - \alpha_1; \beta_2 - \beta_1; \gamma_2 - \gamma_1)$.

Аналогічно визначається афінна система координат на площині.