Лекція №6.

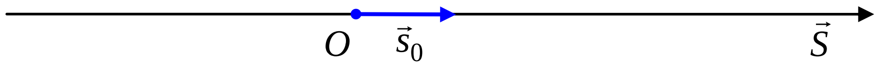
Тема: Добуток векторів у звичайному просторі.

План лекції:

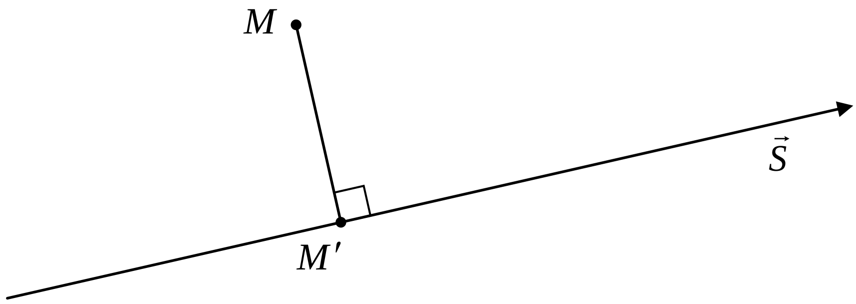
1. Складова вектора вздовж осі та проекція вектора на вісь.
2. Декартова прямокутна система координат.
3. Скалярний добуток векторів.
4. Векторний добуток векторів.
5. Мішаний добуток векторів.

1. <u>Складова вектора вздовж осі та проекція вектора на вісь</u>

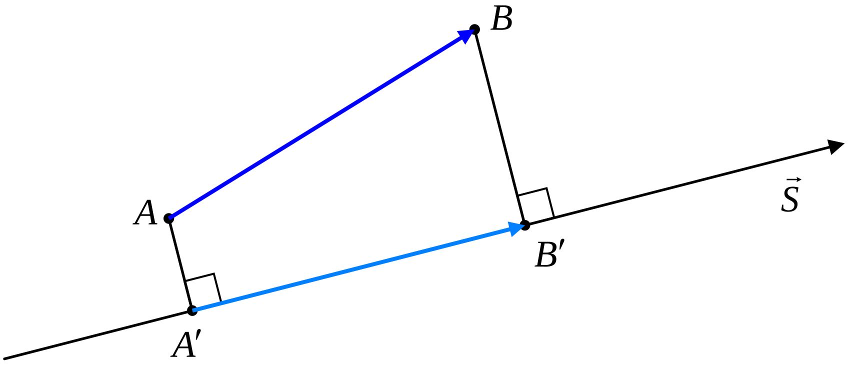
Означення 6.1. Віссю $\vec{S}$ називається пряма, на якій вибрано додатний напрям і одиницю довжини. Вісь $\vec{S}$ визначається одиничним вектором $\vec{s}_0$ (ортом осі).



Означення 6.2. Проекцією точки M вісь $\vec{S}$ називається основа перпендикуляра (точка M'), опущеного з точки M на дану вісь.



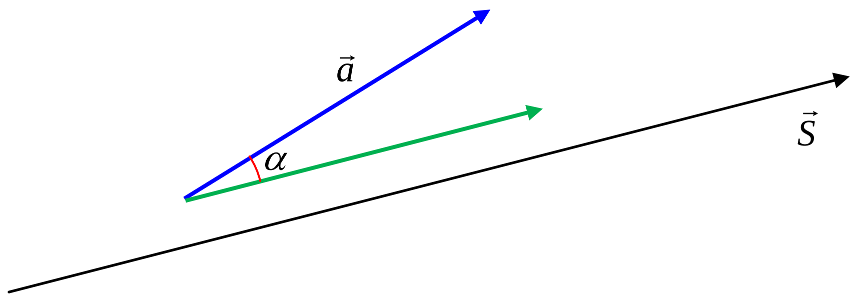
Означення 6.3. Складовою вектора $\overrightarrow{AB}$ вздовж осі $\vec{S}$ називається вектор $\overrightarrow{A'B'}$, де точка A' – проекція точки A, а точка B' – проекція точки B на вісь $\vec{S}$.



Означення 6.4. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{S}$ називається довжина складової цього вектора вздовж осі $\vec{S}$, взята з додатним знаком, якщо напрямки складової та осі збігаються, і з від'ємним знаком, якщо складова та вісь мають протилежні напрямки. Проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\vec{S}$ позначають $np_{\vec{S}}\overrightarrow{AB}$.

Тобто $np_{\vec{S}}\overrightarrow{AB} = \begin{cases} \left|\overrightarrow{A'B'}\right|, & \overrightarrow{A'B'} \uparrow\uparrow \vec{S}, \\ -\left|\overrightarrow{A'B'}\right|, & \overrightarrow{A'B'} \uparrow\downarrow \vec{S}. \end{cases}$

Означення 6.5. Кутом α між вектором $\vec{a}$ і віссю $\vec{S}$ (або між двома векторами) називають менший із кутів на який треба повернути вектор або вісь, щоб їх напрямки збіглись.



Теорема 6.1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь $\vec{S}$ дорівнює добутку довжини цього вектора на косинус кута α між вектором та віссю, тобто

$$np_{\vec{S}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha \tag{6.1}$$

Властивості проекції вектора на вісь:

1. Проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій доданків, тобто

$$np_{\vec{S}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) = np_{\vec{S}}\vec{a}_1 + np_{\vec{S}}\vec{a}_2 + \ldots + np_{\vec{S}}\vec{a}_n.$$

2. Проекція добутку скаляра на вектор дорівнює добутку цього скаляра на проекцію вектора, тобто

$$np_{\vec{S}}\lambda\vec{a} = \lambda np_{\vec{S}}\vec{a}.$$

Приклад 6.1. Знайти проекцію суми векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ на вісь $\vec{S}$, якщо $|\vec{a}| = 5,\ |\vec{b}| = 6,\ |\vec{c}| = 8,\ |\vec{d}| = 12$, а кути, що утворюють ці вектори з віссю $\vec{S}$ відповідно рівні $0, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{1}{3}\pi$.

Розв'язок. Використаємо першу властивість проекції вектора на вісь:

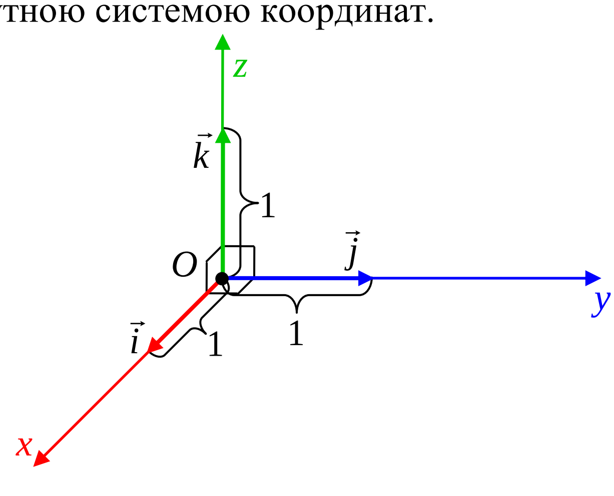
$$np_{\vec{S}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) = np_{\vec{S}}\vec{a}_1 + np_{\vec{S}}\vec{a}_2 + \ldots + np_{\vec{S}}\vec{a}_n.$$

$$np_{\vec{S}}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right) = np_{\vec{S}}\vec{a} + np_{\vec{S}}\vec{b} + np_{\vec{S}}\vec{c} + np_{\vec{S}}\vec{d} = 5\cdot\cos 0 + 6\cdot\cos\frac{2}{3}\pi + 8\cdot\cos\pi +$$

$$+12\cdot\cos\frac{1}{3}\pi = 5 + 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 8\cdot(-1) + 12\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

2. <u>Декартова прямокутна система координат</u>

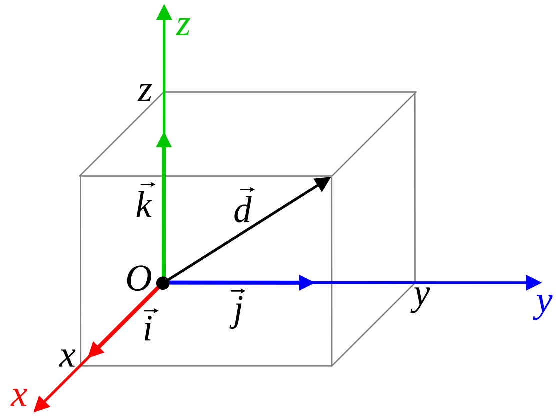
Означення 6.6. Якщо базисні вектори афінної системи координат є одиничними і взаємно ортогональними, то така система координат називається декартовою прямокутною системою координат.



У випадку декартової прямокутної системи координат базисні вектори позначають через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ є відповідно ортами осей Ox, Oy, Oz. Кожний вектор $\vec{d}$ може бути єдиним способом розкладений за декартовим прямокутним базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, тобто для кожного вектора $\vec{d}$ знайдеться єдина трійка чисел x, y, z така, що справедлива рівність:

$$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z).$$

Числа x, y, z називаються декартовими прямокутними координатами вектора $\vec{d}$.

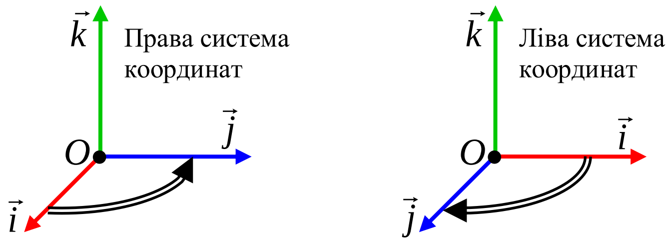


Якщо M - точка простору, то декартові прямокутні координати цієї точки збігаються з декартовими координатами її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$, тобто запис $M(x, y, z)$ рівносильний запису $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$. Якщо задано точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Теорема 6.2. Декартові прямокутні координати x, y, z вектора $\vec{d}$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі Ox, Oy, Oz відповідно, а вектори $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$ є складовими вектора $\vec{d}$ вздовж осей Ox, Oy, Oz.

Зауваження 6.1. Нехай вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ мають спільний початок O. Система координат $Oxyz$ називається правою (лівою), якщо поворот на найменший кут від $\vec{i}$ до $\vec{j}$, що спостерігається з кінця вектора $\vec{k}$, відбувається проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою). Аналогічно визначається права (ліва) система координат на площині. Надалі завжди будуть розглядатися тільки праві системи координат.



Позначимо α, β, γ – кути нахилу вектора $\vec{d}$ до осей Ox, Oy, Oz відповідно. Три числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються напрямними косинусами вектора $\vec{d}$.

Справедливі співвідношення.

Для проекцій вектора $\vec{d}$ на осі маємо

$$x = \left|\vec{d}\right|\cos\alpha,\ \ y = \left|\vec{d}\right|\cos\beta,\ \ z = \left|\vec{d}\right|\cos\gamma .$$

Довжина вектора $\vec{d}$ виражається через його координати формулою

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ . \tag{4.2}$$

Напрямні косинуси вектора $\vec{d}$ виражаються через координати цього вектора за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};\ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{4.3}$$

Сума квадратів напрямних косинусів будь-якого вектора дорівнює одиниці, тобто

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1),\ \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2); \\ \vec{a} - \vec{b} &= (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Якщо $\vec{a} = (x, y, z)$, то для будь-якого числа α

$$\alpha\,\vec{a} = (\alpha\, x, \alpha\, y, \alpha\, z).$$

Приклад 6.2. Дано точки $A(0;-1;2)$ і $B(-1;1;4)$. Знайти: 1) координати вектора $\overrightarrow{AB}$; 2) довжину вектора $\overrightarrow{AB}$; 3) напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язок. $\overrightarrow{AB} = (-1-0;1-(-1);4-2) = (-1;2;2)$;

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^{23}}} = \frac{2}{3},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2}{3}.$$

3. <u>Скалярний добуток векторів</u>

Означення 6.7. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке позначають символом $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ (або $\vec{a} \cdot \vec{b}$), що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними, тобто $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a}\vec{b}\right)$.

<u>Наслідок 6.1</u>. Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з цих векторів на проекцію другого вектора на вісь, що визначається першим з указаних векторів, тобто

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} \text{ або } \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left|\vec{b}\right| np_{\vec{b}}\vec{a}\ .$$

Якщо один з векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = 0$.

Фізичний зміст скалярного добутку векторів. З шкільного курсу фізики відомо, що робота A сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{S}$, який утворює з вектором сили кут α, дорівнює $A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\alpha$. Виходячи з означення скалярного добутку векторів, можна стверджувати, що робота – це скалярний добуток вектора сили на вектор переміщення.

Властивості скалярного добутку векторів.

Алгебраїчні властивості:

1. $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{b}, \vec{a} \right\rangle$ (*комутативна властивість*).
2. $\left\langle \alpha\vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ (*асоціативна властивість*).
3. $\left\langle \left(\vec{a} + \vec{b}\right), \vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{c} \right\rangle + \left\langle \vec{b}, \vec{c} \right\rangle$ (*дистрибутивна властивість*).
4. $\left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle > 0$, якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{a}\vec{a} = 0$, якщо $\vec{a} = \vec{0}$.
5. $\left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle = \left|\vec{a}\right|^2$. Добуток $\left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle$ позначається через $\vec{a}^2$ і називається скалярним квадратом. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату довжини вектора.

Геометричні властивості скалярного добутку.

Теорема 6.3. Необхідною і достатньою умовою ортогональності двох векторів є рівність нулю їх скалярного добутку.

Теорема 6.4. Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють гострий (тупий) кут тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток додатний (від’ємний).

Зауваження 6.2. Справедливі рівності

$$\vec{i}^{\,2} = 1; \quad \vec{j}^{\,2} = 1; \quad \vec{k}^{\,2} = 1; \quad \left\langle \vec{i}, \vec{j} \right\rangle = \left\langle \vec{i}, \vec{k} \right\rangle = \left\langle \vec{j}, \vec{k} \right\rangle = 0.$$

Теорема 6.5. Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат, тобто

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Доведення. $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \right\rangle =$

$$= \left\langle x_1\vec{i}, x_2\vec{i} \right\rangle + \left\langle x_1\vec{i}, y_2\vec{j} \right\rangle + \left\langle x_1\vec{i}, z_2\vec{k} \right\rangle + \left\langle y_1\vec{j}, x_2\vec{i} \right\rangle + \left\langle y_1\vec{j}, y_2\vec{j} \right\rangle + \left\langle y_1\vec{j}, z_2\vec{k} \right\rangle +$$
$$+ \left\langle z_1\vec{k}, x_2\vec{i} \right\rangle + \left\langle z_1\vec{k}, y_2\vec{j} \right\rangle + \left\langle z_1\vec{k}, z_2\vec{k} \right\rangle =$$
$$= x_1x_2\underbrace{\left\langle \vec{i}, \vec{i} \right\rangle}_{1} + x_1y_2\underbrace{\left\langle \vec{i}, \vec{j} \right\rangle}_{0} + x_1z_2\underbrace{\left\langle \vec{i}, \vec{k} \right\rangle}_{0} + y_1x_2\underbrace{\left\langle \vec{j}, \vec{i} \right\rangle}_{0} + y_1y_2\underbrace{\left\langle \vec{j}, \vec{j} \right\rangle}_{1} + y_1z_2\underbrace{\left\langle \vec{j}, \vec{k} \right\rangle}_{0} +$$
$$+ z_1x_2\underbrace{\left\langle \vec{k}, \vec{i} \right\rangle}_{0} + z_1y_2\underbrace{\left\langle \vec{k}, \vec{j} \right\rangle}_{0} + z_1z_2\underbrace{\left\langle \vec{k}, \vec{k} \right\rangle}_{1} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

<u>*Наслідок 6.2.*</u> Необхідною і достатньою умовою ортогональності векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ є рівність

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Наслідок 6.3. Кут між векторами $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ і $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ визначається за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Наслідок 6.4. Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначається за формулою

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Наслідок 6.5.

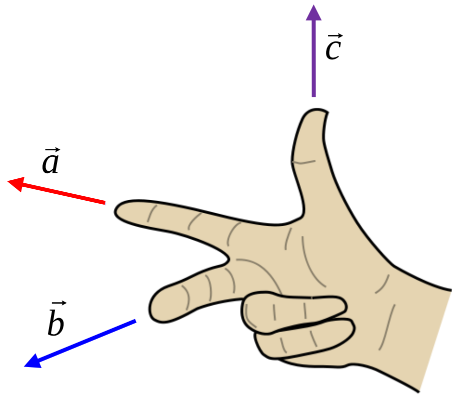
$$|\vec{a}|^2=\langle\vec{a},\vec{a}\rangle=x_1^2+y_1^2+z_1^2.$$

4. Векторний добуток векторів

Означення 6.8. Три вектори утворюють впорядковану трійку векторів, якщо вказано, який із цих векторів є першим, який – другим, який – третім.

Означення 6.9. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається правою (лівою), якщо після приведення до спільного початку найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, що спостерігається з кінця вектора $\vec{c}$, відбувається проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою).

Зауваження 6.3. Праву (ліву) трійку утворюють великий, незігнутий вказівний та середній пальці правої (лівої) руки.



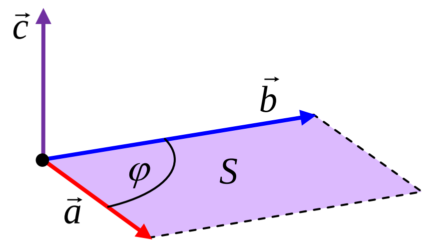
Означення 6.10. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що позначається символом $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ (або $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$) і задовольняє трьом вимогам:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута φ між ними, тобто

$$|\vec{c}|=|[\vec{a},\vec{b}]|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi;$$

2) вектор $\vec{c}$ ортогональний кожному із векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$, якщо $\vec{c}\neq\vec{0}$, напрямлений так, що трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є правою.



Геометричні властивості векторного добутку

Теорема 6.6. Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів є рівність нулю їх векторного добутку.

Теорема 6.7. Довжина (модуль) векторного добутку $[\vec{a},\vec{b}]$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на приведених до спільного початку векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тобто $|[\vec{a},\vec{b}]| = S$.

<u>Наслідок 6.6.</u> Якщо $\vec{e}$ – орт векторного добутку $[\vec{a},\vec{b}]$, а S – площа паралелограма, побудованого на приведених до спільного початку векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то $[\vec{a},\vec{b}] = S\vec{e}$.

Алгебраїчні властивості векторного добутку

1. $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$ (*антикомутативна властивість*).
2. $[\alpha\vec{a},\vec{b}] = \alpha[\vec{a},\vec{b}]$ (*асоціативна властивість*).
3. $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c}]$ (*дистрибутивна властивість*).
4. $[\vec{a},\vec{a}] = 0$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.

Зауваження 6.4. Справедливі рівності:

$$[\vec{i},\vec{i}] = [\vec{j},\vec{j}] = [\vec{k},\vec{k}] = 0;\ [\vec{i},\vec{j}] = \vec{k};\ [\vec{i},\vec{k}] = -\vec{j};\ [\vec{j},\vec{k}] = \vec{i}.$$

Теорема 6.8. Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1),\ \vec{b} = (x_2; y_2; z_2),$$

то векторний добуток цих векторів має вигляд

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Доведення. $[\vec{a},\vec{b}] = [x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}] =$

$$= [x_1\vec{i}, x_2\vec{i}] + [x_1\vec{i}, y_2\vec{j}] + [x_1\vec{i}, z_2\vec{k}] + [y_1\vec{j}, x_2\vec{i}] + [y_1\vec{j}, y_2\vec{j}] + [y_1\vec{j}, z_2\vec{k}] +$$
$$+ [z_1\vec{k}, x_2\vec{i}] + [z_1\vec{k}, y_2\vec{j}] + [z_1\vec{k}, z_2\vec{k}] =$$
$$= x_1x_2\underbrace{[\vec{i},\vec{i}]}_{\vec{0}} + x_1y_2\underbrace{[\vec{i},\vec{j}]}_{\vec{k}} + x_1z_2\underbrace{[\vec{i},\vec{k}]}_{-\vec{j}} + y_1x_2\underbrace{[\vec{j},\vec{i}]}_{-\vec{k}} + y_1y_2\underbrace{[\vec{j},\vec{j}]}_{\vec{0}} + y_1z_2\underbrace{[\vec{j},\vec{k}]}_{\vec{i}} +$$
$$+ z_1x_2\underbrace{[\vec{k},\vec{i}]}_{\vec{j}} + z_1y_2\underbrace{[\vec{k},\vec{j}]}_{-\vec{i}} + z_1z_2\underbrace{[\vec{k},\vec{k}]}_{\vec{0}} =$$
$$= x_1x_2\vec{0} + x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1y_2\vec{0} + y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} + z_1z_2\vec{0} =$$
$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

<u>*Наслідок 6.7.*</u> Два вектори $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Застосування векторного добутку

1. *Знаходження площі паралелограма та трикутника*. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$

$$S_{пар}=|[\vec{a},\vec{b}]|.$$

Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, дорівнює половині довжини векторного добутку:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|[\vec{a},\vec{b}]|.$$

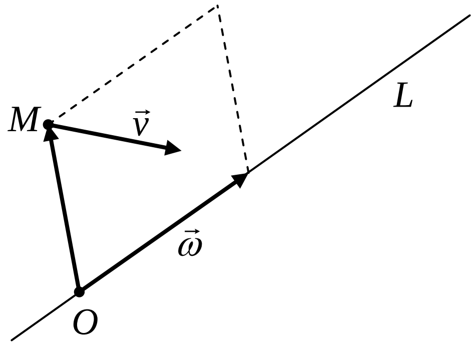
Висоту паралелограма та трикутника, опущену на ребро, утворене вектором $\vec{a}$, можна знайти за формулою:

$$h=\frac{|[\vec{a},\vec{b}]|}{|\vec{a}|}.$$

2. *Швидкість точки обертового тіла*. Нехай деяке тіло обертається навколо нерухомої точки O з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. У будь-який момент вектор $\vec{\omega}$ збігається за напрямом з миттєвою віссю обертання L. Миттєва лінійна швидкість $\vec{v}$ довільної точки M тіла, що розташована не на осі L, визначається вектором

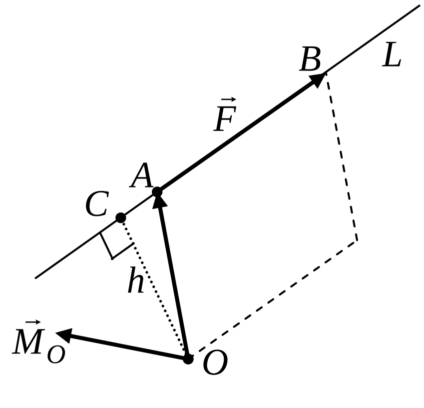
$$\vec{v}=|[\vec{\omega},\overrightarrow{OM}]|.$$

де O – деяка нерухома точка осі.



3. *Момент інерції сили відносно точки*. Нехай $\vec{F}=\overrightarrow{AB}$ – вектор сили, прикладеної до точки A. *Моментом* $\vec{M}$ *сили* $\vec{F}$ *відносно точки O називають* вектор

$$\vec{M}_O(\vec{F})=[\overrightarrow{OA},\vec{F}].$$



Довжина моменту $|\vec{M}|$ не залежить від точки A прикладання сили $\vec{F}$ на її лінії дії L. Справді,

$$|\vec{M}| = |[\overrightarrow{OA}, \vec{F}]| = |\vec{F}|\, h,$$

де $h = OC$ – перпендикуляр до L. Величина h від точки A не залежить.

4. *Напрям поширення електромагнітних хвиль*. В однорідному ізотропному середовищі поширення електромагнітної хвилі визначається вектором

$$\vec{v} = [\vec{E}, \vec{H}],$$

де $\vec{E}$ та $\vec{H}$ – вектори електричної та магнітної напруженості відповідно. Крім того, вектор густини $\vec{P}$ потоку енергії (вектор Пойтинґа), що переноситься полем, визначають за формулою

$$\vec{P} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{4\pi}\vec{v},$$

де c – швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі.

5. *Сила, що діє на провідник зі струмом*. Відомо, що магнітне поле діє як на окремі рухомі заряди, так і на провідники з електричним струмом. Встановлено, що сила $\vec{F}$, з якою однорідне магнітне поле діє на прямолінійний провідник завдовжки l зі струмом $\vec{I}$, визначається законом

$$\vec{F} = l[\vec{I}, \vec{B}],$$

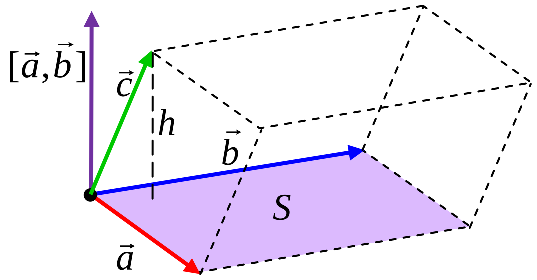
де $\vec{B}$ – вектор магнітної індукції, що характеризує силовий вплив магнітного поля.

5. Мішаний добуток векторів

Нехай дано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Означення 6.11. Якщо вектор $\vec{a}$ векторно помножити на вектор $\vec{b}$, а потім одержаний вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ скалярно помножити на вектор $\vec{c}$, то в результаті одержується число $\left\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \right\rangle$, яке називається мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Теорема 6.9. Мішаний добуток $\left\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \right\rangle$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на приведених до спільного початку векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, взятому із знаком плюс, якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – права, і із знаком мінус, якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – ліва. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, то $\left\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \right\rangle$ дорівнює нулю.



Наслідок 6.8. Справедлива рівність

$$\left\langle [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}] \right\rangle.$$

Тому мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ звичайно позначають $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, не вказуючи, які два з цих векторів перемножуються векторно.

Наслідок 6.9. Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку.

Наслідок 6.10. Мішаний добуток трьох векторів, два з яких колінеарні, дорівнює нулю.

Теорема 6.10. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами:

$$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1),\ \ \vec{b}=(x_2;y_2;z_2),\ \ \vec{c}=(x_3;y_3;z_3),$$

то мішаний добуток $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ дорівнює визначнику, елементи рядків якого відповідно дорівнюють координатам векторів, що перемножаються, тобто

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Справедливість цієї теореми випливає з теорем 6.5, 6.8 та означення мішаного добутку векторів.

Наслідок 6.11. Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$ є рівність нулю визначника, рядками якого є координати цих векторів, тобто рівність

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

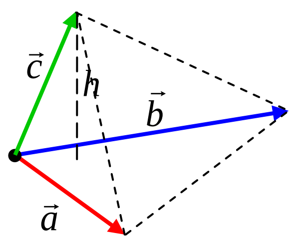
Застосування мішаного добутку

1. *Знаходження об'єму паралелепіпеда та трикутної піраміди*, побудованих на некомпланарних векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Об'єм паралелепіпеда:

$$V_{пар}=(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

Об'єм піраміди, побудованої на векторах *a*,*b* та *c*, можна знайти за формулою

$$V_{пір}=\frac{1}{6}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$



Висоту паралелепіпеда та трикутної піраміди, опущену на грань, утворену векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, можна знайти за формулою:

$$h=\frac{|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|}{|[\vec{a},\vec{b}]|}.$$

2. *Встановлення взаємної орієнтації і компланарності векторів*. Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

1) якщо $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})>0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку;

2) якщо $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})<0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють ліву трійку;

3) якщо $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні.

Приклад 6.3. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}(1,-2,3)$, $\vec{b}(2,1,2)$ та $\vec{c}(1,3,5)$.
Розв'язок.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot5+(-2)\cdot2\cdot1+2\cdot3\cdot3-3\cdot1\cdot1-(-2)\cdot2\cdot5-2\cdot3\cdot1=$$
$$=5-4+18-3+20-6=30.$$

Приклад 6.4. Для заданих точок $A(-1,2,4)$, $B(0,5,2)$, $C(1,1,7)$, $D(-2,3,1)$ знайти:
1) скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;
2) косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;
3) векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;
4) мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$;
5) висоту піраміди $ABCD$, опущену з вершини D.
Розв'язок.
1) $\overrightarrow{AB}=(1,3,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(2,-1,3)$,

$$\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\rangle=1\cdot2+3\cdot(-1)+(-2)\cdot3=2-3-6=-7.$$

2) $$\cos\left(\overrightarrow{AB},^\wedge\overrightarrow{AC}\right)=\frac{-7}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{-7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=-\frac{1}{2}.$$

3) $$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=(7,-7,-7).$$

4) $\overrightarrow{AD}=(-1,1,-3)$;

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\left\langle[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}],\overrightarrow{AD}\right\rangle=$$
$$=\left\langle(7,-7,-7),(-1,1,-3)\right\rangle=7\cdot(-1)+(-7)\cdot1+(-7)\cdot(-3)=-7-7+21=7.$$

5) $|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|=\sqrt{7^2+(-7)^2+(-7)^2}=\sqrt{49+49+49}=\sqrt{147}=7\sqrt{3}.$

$$h=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|}{|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|}=\frac{7}{7\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$