**Лекція №8.**

**Тема: Площина у просторі.**

План лекції:

1. Вступ до аналітичної геометрії (продовження).
2. Площина у просторі:
   1) загальне рівняння площини та його дослідження;
   2) рівняння площини, що проходить через три точки; рівняння площини у відрізках по осях;
   3) кут між двома площинами, умови паралельності та перпендикулярності площин;
   4) відстань від точки до площини.

1. <u>Вступ до аналітичної геометрії (продовження)</u>

Розглянемо деяку поверхню у звичайному (3-вимірному) просторі.

***Означення 7.1.*** Рівняння

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

задає поверхню в декартовій прямокутній системі координат, якщо:

1) Координати будь-якої точки поверхні задовольняють це рівняння;
2) Будь-яка трійка чисел $x$, $y$ і $z$, які задовольняють рівняння, є координатами деякої точки поверхні.

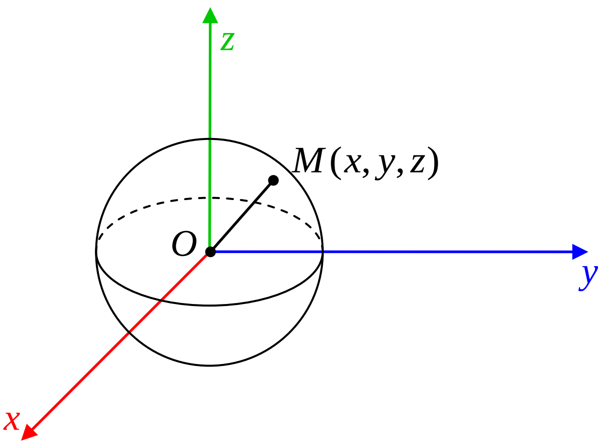
Іншими словами: точка належить поверхні тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють рівняння поверхні.

Якщо поверхня задана рівнянням (1), то кажуть, що вона визначена (задана) неявно, а якщо рівняння поверхні записане у вигляді

$$z = f(x, y), \qquad (2)$$

то кажуть, що поверхня задана явно.

Наприклад, сферу з центром у точці $O$ радіуса $R$ можна розглядати, як геометричне місце точок, віддалених від точки $O$ на відстань $R$. Отже, для будь-якої точки $M$, що лежить на сфері, $|\overrightarrow{OM}| = R$. З іншого боку, якщо точка $M'$ не лежить на сфері, то $|\overrightarrow{OM'}| \neq R$.




Знайдемо рівняння сфери. Нехай точка кола $M$ має координати $(x, y, z)$, тоді

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = (x-0, y-0, z-0) = (x, y, z), \\ |\overrightarrow{OM}| = R \end{array}\right\} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

***Означення 7.2.*** Параметричними рівняннями поверхні $\sigma$ у декартовій прямокутній системі координат називають рівності

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \qquad (3)$$

де функції $x(u,v)$, $y(u,v)$ та $z(u,v)$ мають непорожню спільну область визначення $D$ і кожній парі чисел $(x,y) \in D$ відповідає точка $M(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \sigma$ та для кожної точки $M(x,y,z) \in \sigma$ знайдеться така пара чисел $(x,y) \in D$, що числа $x(u,v)$, $y(u,v)$ та $z(u,v)$ будуть координатами точки $M$. Поверхню $\sigma$ при цьому називають заданою параметрично.

Параметричні рівняння можна записати у векторному вигляді:

$\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, або $\vec{r} = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$, або $\vec{r} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Наприклад, параметричне рівняння сфери має вигляд:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta, \\ y = R\sin\varphi\sin\theta, \\ z = R\cos\theta. \end{cases}$$

Лінію у просторі природно розглядати як переріз двох поверхонь, тобто як геометричне місце точок, що лежать одночасно на двох поверхнях.

***Означення 7.3.*** Система рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0, \end{cases} \qquad (4)$$

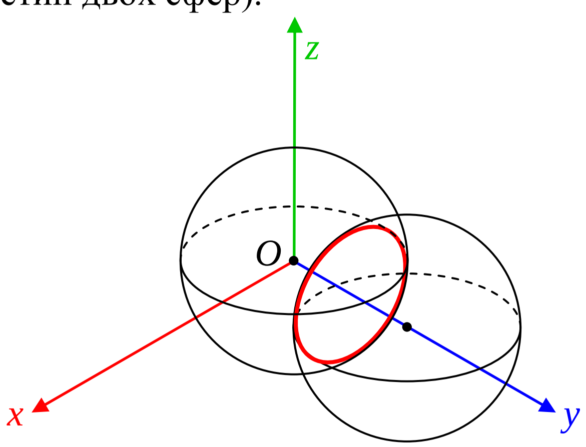
де $F_1(x,y,z) = 0$ та $F_2(x,y,z) = 0$ рівняння двох поверхонь, задає лінію $L$ в декартовій прямокутній системі координат, якщо:

1) Координати будь-якої точки лінії задовольняють обидва рівняння одночасно;
2) Будь-яка трійка чисел $x$, $y$ і $z$, які задовольняють рівняння системи, є координатами деякої точки лінії.

Наприклад, система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

визначає коло (як перетин двох сфер).



***Означення 7.4.*** Нехай задано рівності

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad (5)$$

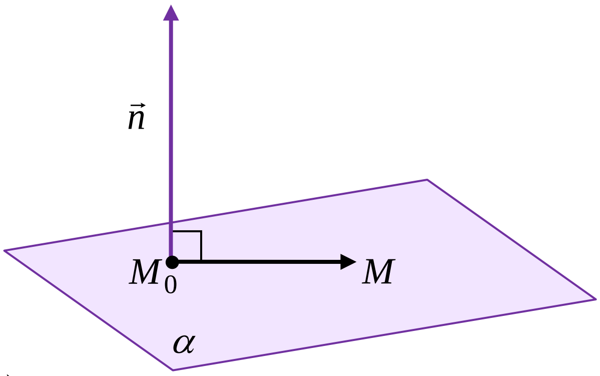
де функції $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$ мають непорожню спільну область визначення $T$. І нехай кожному значенню $t \in T$ відповідає точка $M(x(t), y(t))$ деякої кривої $L$, а для кожної точки $M(x, y, z) \in L$ знайдеться таке $t \in T$, що $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$ є координатами точки $M$. Тоді рівності (5) називають параметричними рівняннями кривої $L$, змінну $t$ називають параметром цих рівнянь, а криву називають заданою параметрично.

Параметричні рівняння можна записати у векторному вигляді:

$\vec{r} = \vec{r}(t)$, або $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, або $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$.

2. Площина у просторі
   1) Загальне рівняння площини та його дослідження

Нехай у декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$ площина $\alpha$ задана точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і вектором $\vec{n}(A, B, C)$, перпендикулярним до площини $\alpha$. Вектор $\vec{n}$ називають нормальним вектором площини $\alpha$.




Точка $M(x, y, z)$ належить площині $\alpha$ тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ буде перпендикулярний до вектора $\vec{n}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \left\langle \overrightarrow{M_0M}, \vec{n} \right\rangle = 0, \\ \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \\ \vec{n} = (A, B, C) \end{array}\right\} \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

– рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A, B, C)$. Розкриємо дужки в отриманому рівнянні: $Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$. Позначимо $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$. Тоді отримаємо:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$ – загальне рівняння площини.

Якщо $Ax + By + Cz + D = 0$ загальне рівняння площини, то координати її нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$.

Дослідимо загальне рівняння площини:

1. Якщо $D=0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $Ax+By+Cz=0$. Точка $O(0;0;0)$ задовольняє дане рівняння, отже площина проходить через початок координат.
2. Якщо $A=0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $By+Cz+D=0$. Координати нормального вектора такої площини $\vec{n}(0;B;C)$, отже площина паралельна до осі $Ox$.
3. Якщо $B=0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $Ax+Cz+D=0$. Координати нормального вектора такої площини $\vec{n}(A;0;C)$, отже площина паралельна до осі $Oy$.
4. Якщо $C=0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $Ax+By+D=0$. Координати нормального вектора такої площини $\vec{n}(A;B;0)$, отже площина паралельна до осі $Oz$.
5. Якщо $A=B=0$, а $C\neq 0, D\neq 0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $Cz+D=0 \Rightarrow z=-\dfrac{D}{C}$ – рівняння площини паралельної до площини $xOy$.
6. Якщо $B=C=0$, а $A\neq 0, D\neq 0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $Ax+D=0 \Rightarrow x=-\dfrac{D}{A}$ – рівняння площини паралельної до площини $yOz$.
7. Якщо $A=C=0$, а $B\neq 0, D\neq 0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $By+D=0 \Rightarrow y=-\dfrac{D}{B}$ – рівняння площини паралельної до площини $xOz$.
8. Якщо $A=D=0$, а $B\neq 0, C\neq 0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $By+Cz=0$ – рівняння площини, що проходить через вісь $Ox$. Дійсно, якщо $A=0$, то площина паралельна до осі $Ox$. Якщо $D=0$, то площина проходить через початок координат. Отже, $By+Cz=0$ проходить через вісь $Ox$.
9. Якщо $B=D=0$, а $A\neq 0, C\neq 0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $Ax+Cz=0$ – рівняння площини, що проходить через вісь $Oy$.
10. Якщо $C=D=0$, а $A\neq 0, B\neq 0$, то загальне рівняння площини набуває вигляду $Ax+By=0$ – рівняння площини, що проходить через вісь $Oz$.
11. Якщо $A=B=D=0$, а $C\neq 0$ то загальне рівняння площини набуває вигляду $Cz=0 \Rightarrow z=0$ – рівняння площини $xOy$.
12. Якщо $A=C=D=0$, а $B\neq 0$ то загальне рівняння площини набуває вигляду $By=0 \Rightarrow y=0$ – рівняння площини $xOz$.
13. Якщо $B=C=D=0$, а $A\neq 0$ то загальне рівняння площини набуває вигляду $Ax=0 \Rightarrow x=0$ – рівняння площини $yOz$.

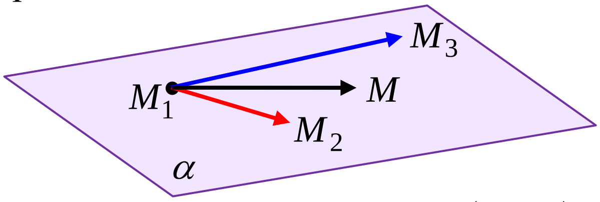
**Приклад 8.1.** Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1;2;3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(-1;-3;3)$.

*Розв'язок.*

Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A, B, C)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.
Для випадку, описаного в умові задачі: $-1(x-1) - 3(y-2) + 3(z-3) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -x + 1 - 3y + 6 + 3z - 9 = 0 \Rightarrow -x - 3y + 3z - 2 = 0 \Rightarrow x + 3y - 3z + 2 = 0$.

2) <u>Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках по осях</u>

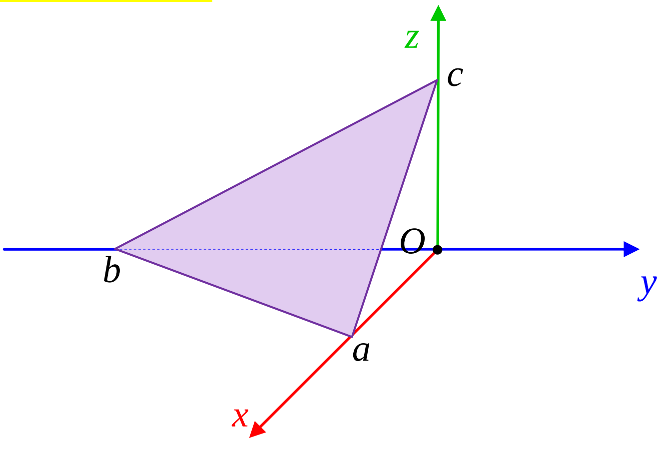
Нехай на площині $\alpha$ задано три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій. Ці точки однозначно визначають площину. Знайдемо її рівняння.




Візьмемо на площині до вільну точку $M(x; y; z)$ і побудуємо вектори $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ і $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$. Ці вектори компланарні, а отже їх мішаний добуток рівний нулю:

$$\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$ – рівняння площини, що проходить через три точки.

Розглянемо окремий випадок. Нехай площина перетинає координатні осі у точках $(a;0;0)$, $(0;b;0)$ і $(0;0;c)$.




Тоді рівняння площини набуде вигляду:

$$\begin{vmatrix} x - a & y - 0 & z - 0 \\ 0 - a & b - 0 & 0 - 0 \\ 0 - a & 0 - 0 & c - 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - a & y - 0 & z - 0 \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow xbc + yac + zab - abc = 0 \Rightarrow.$$

$\Rightarrow xbc + yac + zab = abc$. Розділимо обидві сторони отриманого рівняння на $abc$. Отримаємо $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – рівняння площини у відрізках по осях.

**Приклад 8.2.** Написати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(-1;0;2)$, $M_3(-2;1;0)$.

*Розв'язок.*

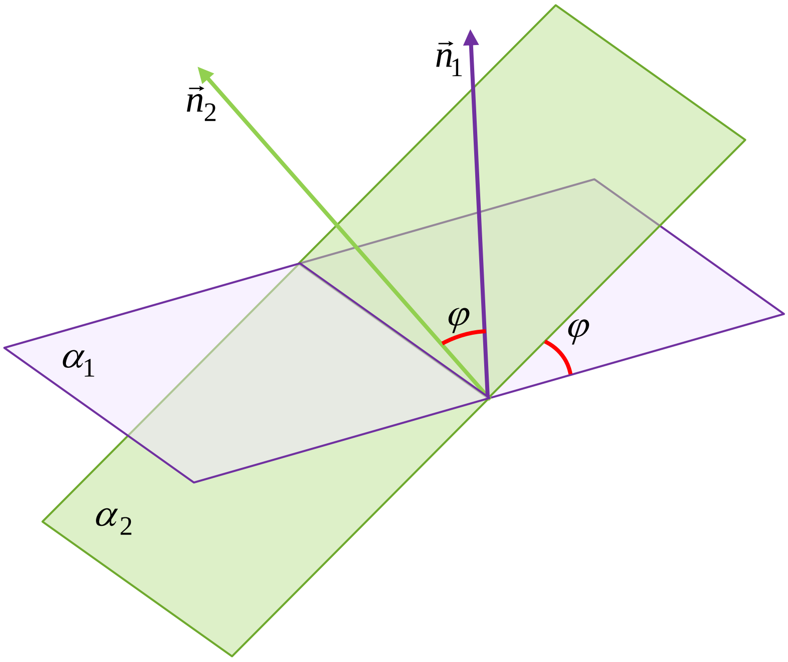
Використаємо рівняння площини, що проходить через три точки
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 0-2 & 2-3 \\ -2-1 & 1-2 & 0-3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 5(x-1)-3(y-2)-4(z-3)=0$$

$$\Rightarrow 5x-5-3y+6-4z+12=0 \Rightarrow 5x-3y-4z+13=0.$$

3) <u>Кут між двома площинами, умови паралельності та перпендикулярності площин</u>

Нехай задано дві площини $\alpha_1 : A_1x +_1 y + C_1z + D_1 = 0$ і $\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Двогранний кут між площинами вимірюється лінійним кутом, який дорівнює куту між нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ цих площин.




Отже, $\cos\varphi = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

Якщо площини $\alpha_1$ і $\alpha_2$ перпендикулярні, то $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, тобто $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ – умова перпендикулярності двох площин.

Якщо площини $\alpha_1$ і $\alpha_2$ паралельні, то $\vec{n}_1 \,||\, \vec{n}_2$, тобто $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ - умова паралельності двох площин.

**Приклад 8.3.** Знайти кут між площинами $x - 2y + 4z - 3 = 0$ і $2x + 4y - z + 5 = 0$.

*Розв'язок.*

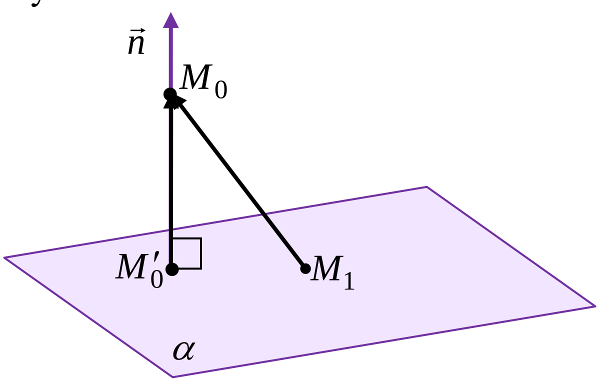
Визначимо координати нормальних векторів для заданих площин:

$$\vec{n}_1=(1;-2;4);\ \vec{n}_2=(2;4;-1),$$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{1\cdot2+(-2)\cdot4+4\cdot(-1)}{\sqrt{1+4+16}\cdot\sqrt{4+16+1}}=\frac{-10}{21},\ \varphi=ar\cos\left(-\frac{10}{21}\right).$$

4) <u>Відстань від точки до площини</u>

Якщо відоме рівняння площини $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ і координати точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, що не лежить в цій площині, то відстань $d$ від точки $M_0$ до площини $\alpha$ за формулою:



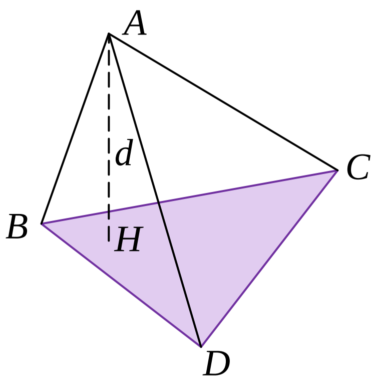

$$d=\left|np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B+(z_0-z_1)C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+(-Ax_1-By_1-Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}==\left|\begin{matrix}Ax_1+By_1+Cz_1+D_1=0\\ D=-Ax_1-By_1-Cz_1\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\Rightarrow d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

**Приклад 8.3.** Знайти висоту $AH$ піраміди, заданої своїми вершинами $A(-1;2;-1)$, $B(1;0;2)$, $C(0;1;-1)$, $D(2;0;-1)$.

*Розв'язок.*




Знайдемо рівняння площини, якій належать точки $B,C,D$.

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-0 & z-2\\ -1 & 1 & -3\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}=0\Rightarrow(x-3)(-3)-6y+(z-2)(-1)=0\Rightarrow-3x-6y-z+5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+6y+z-5=0.$$

Висота $AH$ рівна відстані від точки $A$ до площини $BCD$.

$$AH=d=\frac{3\cdot(-1)+6\cdot2+1\cdot(-1)-5}{\sqrt{9+36+1}}=\frac{3}{\sqrt{46}}.$$