Лекція №9.

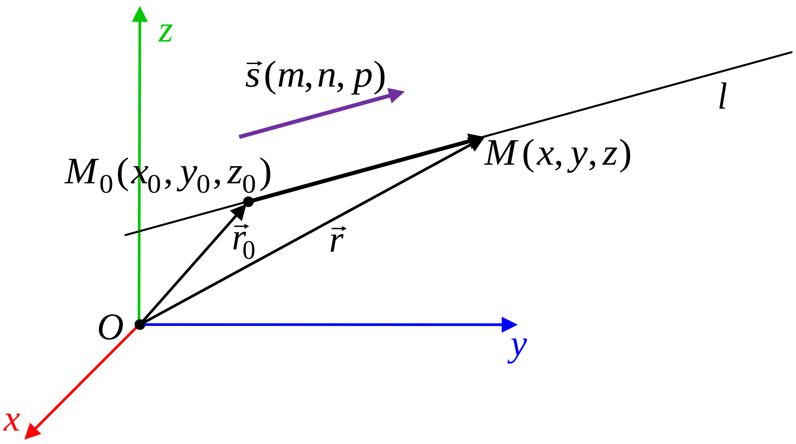
Тема: Пряма у просторі.

План лекції:

1. Різні види рівняння прямої в просторі.
2. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.
3. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини.

1. Різні види рівняння прямої в просторі

Нехай в просторі в прямокутній системі координат задано прямуу, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно до вектора $\vec{s}(m; n; p)$.



Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка прямої. Позначимо $\vec{r}_0(x_0; y_0; z_0)$, $\vec{r}(x; y; z)$ – радіус-вектори точок $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x,y,z)$ відповідно. Тоді

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s},$$

де t – параметр. Або у розгорнутому вигляді $\vec{r} = (x_0; y_0; z_0) + t \cdot (m; n; p)$. Остаточно

$$\vec{r} = (x_0 + mt; y_0 + nt; z_0 + pt).$$

Рівняння $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}$ називають векторно-параметричним рівнянням прямої.

Прирівнявши відповідні координати векторів у лівій і правій частині останньої рівності, отримаємо:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$ – параметричне рівняння прямої.

Виразимо параметр t з кожної із рівностей

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{m}, \\ t = \dfrac{y - y_0}{n}, \\ t = \dfrac{z - z_0}{p}. \end{cases}$$

Ліві частини рівностей однакові, отже і праві теж однакові. Отримаємо:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Отримане рівняння називають канонічним рівнянням прямої в просторі.

Нехай пряма проходить через дві фіксовані точки простору $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$. Тоді $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Зауваження. У наведених вище рівняннях одна або дві координати напрямного вектора $\vec{s}$ можуть дорівнювати нулю. Проте випадки $m=n=p=0$ та $x_2-x_1=y_2-y_1=z_2-z_1=0$ неможливі, тому що за означенням напрямний вектор не може бути нуль вектором $(\vec{s}\neq\vec{0})$.

Дослідимо канонічне рівняння прямої в просторі.

1) $m=0, n\neq 0, p\neq 0$, то рівняння $\dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ визначає пряму перпендикулярну до осі Ox, тому що $\vec{s}(0;n;p)\perp Ox$.

2) $m\neq 0, n=0, p\neq 0$, то рівняння $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{0}=\dfrac{z-z_0}{p}$ визначає пряму перпендикулярну до осі Oy, тому що $\vec{s}(m;0;p)\perp Oy$.

3) $m\neq 0, n\neq 0, p=0$, то рівняння $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{0}$ визначає пряму перпендикулярну до осі Oz, тому що $\vec{s}(m;n;0)\perp Oz$.

4) $m=n=0, p\neq 0$, то рівняння $\dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{0}=\dfrac{z-z_0}{p}$ визначає пряму паралельну до осі Oz, тому що $\vec{s}(0;0;p)\,||\,Oz$.

5) $m=p=0, n\neq 0$, то рівняння $\dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{0}$ визначає пряму паралельну до осі Oy, тому що $\vec{s}(0;n;0)\,||\,Oy$.

6) $p=n=0, m\neq 0$, то рівняння $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{0}=\dfrac{z-z_0}{0}$ визначає пряму паралельну до осі Ox, тому що $\vec{s}(m;0;0)\,||\,Ox$.

Розглянемо випадок, коли пряма в просторі задана як перетин двох площин. Відомо, що дві непаралельні площини перетинаються по прямій. Отже, система із рівнянь двох площин, нормальні вектори яких не колінеарні, визначає в просторі пряму лінію.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Дане рівняння називають загальним рівнянням прямої в просторі.

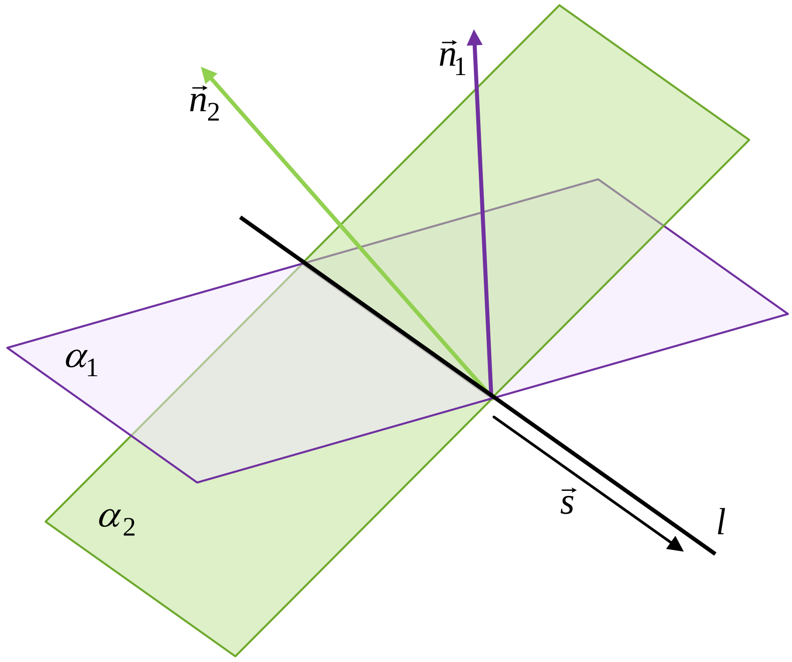
Щоб перейти від загального рівняння прямої в просторі до канонічного рівняння необхідно знайти точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, що належить даній прямій і координати напрямного вектора цієї прямої.

Для знаходження координат точки M_0 одну із координат, наприклад x_0, вибирають довільно, а інші визначають із системи

$$\begin{cases} B_1 y_0 + C_1 z_0 = -D_1 - A_1 x_0', \\ B_2 y_0 + C_2 z_0 = -D_2 - A_1 x_0'. \end{cases}$$

Дана система має розв’язок за умови $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$. Якщо ця умова не виконується, то довільного фіксованого значення надають іншій координаті – y_0 чи z_0.

Щоб знайти координати напрямного вектора $\vec{s}$, враховують, що нормальні вектори даних площин ($\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$) є перпендикулярними до прямої.



Вектор $\vec{s}$ можна знайти, як векторний добуток векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Приклад 9.1. Звести рівняння прямої

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

до канонічного вигляду.

Розв’язок.

Покладемо $x_0 = 0$, отримаємо:

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0, \\ -y + 3z + 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z + 1, \\ -z - 1 + 3z + 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z + 1, \\ 2z = -4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1, \\ z = -2. \end{cases}$$

Отже маємо точку $M_0(0,-1,-2)$. Знайдемо напрямний вектор прямої

$$\vec{s} = (1,1,-1) \times (2,-1,3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (3-1)\vec{i} - (3+2)\vec{j} + (-1-2)\vec{k} = (2,-5,-3).$$

Тоді канонічне рівняння має вигляд:

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{-3}.$$

2. <u>Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих</u>

Нехай прямі l_1 і l_2 задано канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кут φ між цими прямими дорівнює куту між напрямними векторами $\vec{s}_1(m_1,n_1,p_1)$ і $\vec{s}_2(m_2,n_2,p_2)$. Звідси:

1) $\cos\varphi=\dfrac{\langle\vec{s}_1,\vec{s}_2\rangle}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\dfrac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$;

2) $l_1\,||\,l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1\,||\,\vec{s}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$;

3) $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1\perp\vec{s}_2 \Leftrightarrow \langle\vec{s}_1,\vec{s}_2\rangle=0 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Приклад 9.2. Знайти кут між прямими

$$l_1:\begin{cases}2x+y-z-1=0,\\ 2x-y+3z+5=0\end{cases} \text{ і } l_2:\begin{cases}x=2t,\\ y=2-t,\\ z=-2+3t.\end{cases}$$

Розв'язок.

Знайдемо напрямні вектори прямих:

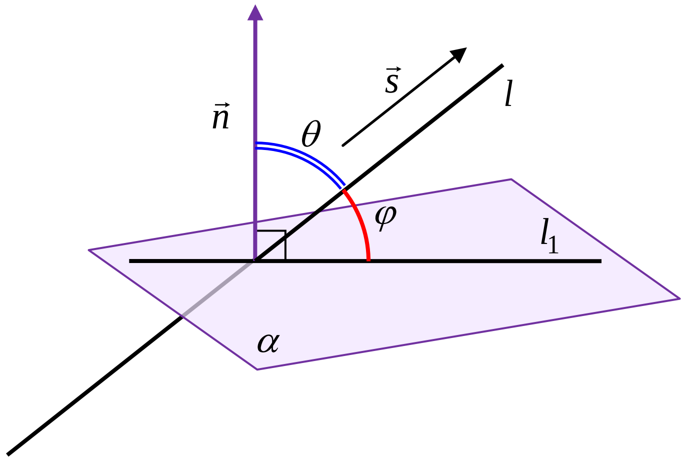
$$\vec{s}_1=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=(3-1)\vec{i}-(6+2)\vec{j}+(-2-2)\vec{k}=(2,-8,-4),$$

$\vec{s}_2=(2,-1,3).$

$$\cos\varphi=\frac{\langle\vec{s}_1,\vec{s}_2\rangle}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{2\cdot2+(-8)\cdot(-1)+(-4)\cdot3}{\sqrt{2^2+(-8)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{4+8-12}{\sqrt{84}\cdot\sqrt{14}}=0\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

3. <u>Кут між прямою і площиною. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини</u>

Означення 9.1. Кутом між прямою l і площиною α називають кут між прямою l і її проекцією на площину α.



Нехай $\alpha:\ Ax+By+Cz+D=0$, $l:\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

Позначимо l_1 – проекцію l на α, $(l\,\hat{,}\,l_1)=\varphi$, $(\vec{s}\,\hat{,}\,\vec{n})=\theta$.

З рівнянь площини і прямої знайдемо також, що $\vec{n}(A,B,C)$, $\vec{s}=(m,n,p)$.

Маємо

$$\left.\begin{aligned}&\theta\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta\Rightarrow\sin\varphi=\cos\theta\\&\theta>\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi=\theta-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\varphi=-\cos\theta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sin\varphi=|\cos\theta|.$$

Проте $\cos\theta=\dfrac{\langle\vec{n},\vec{s}\rangle}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}$, тому кут φ між прямою і площиною знаходять з рівності

$$\sin\varphi=\frac{|\langle\vec{n},\vec{s}\rangle|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Також маємо:

$l\parallel\alpha\Leftrightarrow\vec{n}\perp\vec{s}\Leftrightarrow\langle\vec{n},\vec{s}\rangle=0\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$ – умова паралельності прямої і площини;

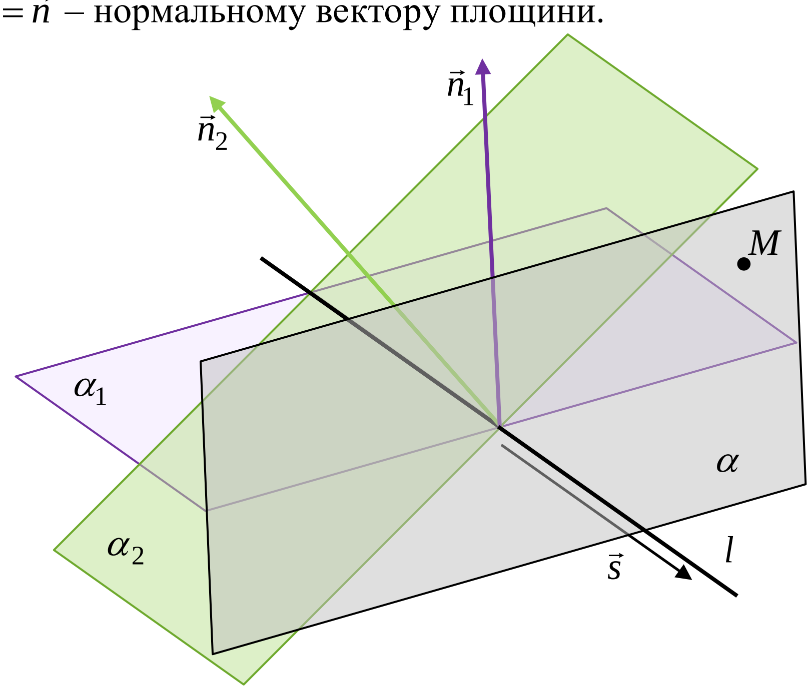
$l\perp\alpha\Leftrightarrow\vec{n}\parallel\vec{s}\Leftrightarrow\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$ – умова перпендикулярності прямої і площини.

Приклад 9.3. Через точку $M(2,2,1)$ провести площину перпендикулярну до прямої

$$l:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\2x+y-z=0.\end{cases}$$

Розв'язок.

Шукана площина α перпендикулярна до заданої прямої l, тому $\vec{s}\perp\alpha$, отже вектор $\vec{s}=\vec{n}$ – нормальному вектору площини.



Знайдемо

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} = (-1,-1,-3).$$

Отже маємо записати рівняння площини з нормальним вектором $\vec{s}(-1,-1,-3)$, що проходить через точку $M(2,2,1)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

$$-1(x-2)-1(y-2)-3(z-1)=0,$$

$$-x-y-3z+7=0 \text{ або } x+y+3z-7=0.$$