Лекція №13.

Тема: Функція.

План лекції:

1. Поняття функції. Способи задання функції.
2. Складена функція.
3. Класифікація елементарних функцій.
4. Графіки основних елементарних функцій.

1. Поняття функції. Способи задання функції.

Нехай дано множину E дійсних чисел.

Означення 13.1. Якщо кожному числу $x \in E$ за певним законом поставлено у відповідність одне дійсне число y, то кажуть, що на множині E задана (визначена) функція і записують $y = f(x)$.

Змінну x називають незалежною змінною або аргументом, а змінну y - залежною змінною або функцією.

Множину E при цьому називають областю визначення або областю існування функції $y = f(x)$.

Щоб задати функцію $y = f(x)$, треба вказати область E, на якій ця функція визначена, і закон відповідності, за яким кожному дійсному числу $x \in E$ ставиться у відповідність дійсне число y.

Основні способи задання функції: аналітичний, графічний, табличний.

Аналітичний – відповідність між x і y задається формулою (аналітичним виразом).

Дві функції називаються рівними, якщо в них одна і та ж область визначення і один закон відповідності.

Наприклад:

1) $\left.\begin{matrix} f(x) = \lg x^2, x \in (0;+\infty) \\ \varphi(x) = 2\lg x, x \in (0;+\infty) \end{matrix}\right\}$ - функції рівні.

2) $\left.\begin{matrix} f(x) = \lg x^2, x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty) \\ \varphi(x) = 2\lg x, x \in (0;+\infty) \end{matrix}\right\}$ - різні функції, оскільки в них різні області визначення.

Якщо $f(x)$ визначена на E і x_0-фіксована точка цієї множини, то число y_0, якому функція $f(x)$ ставить у відповідність точку x_0, називається значенням цієї функції в точці x_0 і позначається $y_0 = f(x_0)$.

Наприклад:

$f(x) = x^2 + x - 1, x \in (-\infty;+\infty),\ x_0 = 2 \in (-\infty;+\infty)$

$f(2) = 2^2 + 2 - 1 = 5$ є значення даної функції в точці $x_0 = 2$.

Нехай функція $f_1(x)$ визначена на множині E_1, а функція $f_2(x)$ на множині E_2. Якщо переріз $E = E_1 \cap E_2$ не є порожня множина, то на цьому перерізі можна визначити суму $f_1(x) + f_2(x)$, різницю $f_1(x) - f_2(x)$, добуток $f_1(x) \cdot f_2(x)$ і частку $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ (при умові $f_2(x) \neq 0, \forall x \in E$).

2. <u>Складена функція.</u>

Означення 13.2. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині E, а функція $x = \varphi(t)$ на множині E_1, причому кожному $t \in E_1$ відповідає значення $\varphi(t) = x$, яка належить E. Тоді на множині E_1 визначена функція $y = f(\varphi(t)) = f_1(t)$, яку називають складеною функцією від змінної t або суперпозицією φ і f.

Наприклад:

$y = \sin x, x \in R, x = \lg t, t \in (0;+\infty)$. Тоді функція $y = \sin(\lg t)$ є складеною, яка визначена на $(0;+\infty)$.

3. <u>Класифікація елементарних функцій.</u>

Основні елементарні функції:

$y = x^{\alpha}$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$, $y = c$.

Означення 13.3. Основні елементарні функції, а також функції задані за допомогою формул, що містять скінченне число арифметичних дій $(+,-,\cdot,\div)$ і суперпозицій над основними елементарними функціями називаються елементарними функціями.

Класи елементарних функцій:

1. Цілі раціональні функції.

Функції виду $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - сталі дійсні числа. Ці функції ще називають алгебраїчними многочленами, а числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - коефіцієнтами многочлена. Якщо $a_0 \neq 0$, то n називають степенем многочлена, a_0 - старшим коефіцієнтом, a_0x^n - старшим членом.

Зауваження. Сума, різниця, добуток многочленів також є многочленом.

2. Раціональні функції.

Функція виду $y = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$ є раціональною функцією.

Якщо $m > n$ - дріб правильний, $m < n$ - дріб неправильний. Неправильний дріб можна подати у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу.

Наприклад: $y = \dfrac{x^5 + 3x^3 + x + 7}{x^3 + 2x^2 + 9}$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 3x^3 + x + 7 & x^3 + 2x^2 + 9 \\
\underline{x^5 + 2x^4 + 9x^2} & \overline{x^2 - 2x + 7} \\
\quad -2x^4 + 3x^3 - 9x^2 + x + 7 & \\
\quad \underline{-2x^4 - 4x^3 - 18x} & \\
\qquad 7x^3 - 9x^2 + 19x + 7 & \\
\qquad \underline{7x^3 + 7x^2 + 63} & \\
\qquad\quad -16x^2 + 19x - 56 &
\end{array}
$$

Отже, $y = x^2 - 2x + 7 + \dfrac{-16x^2 + 19x - 56}{x^3 + 2x^2 + 9}$.

3. Ірраціональні функції.

Ірраціональні функції – це суперпозиція раціональних функцій, степеневих із раціональними показниками і арифметичних дій над ними.

Наприклад: $y = \sqrt[3]{x^2 + 3x} + \sqrt{\dfrac{x+7}{2x+9}}$.

4. Алгебраїчні функції.

Функція $y = f(x)$ називається алгебраїчною, якщо вона задовольняє рівняння $P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_n(x)y + P_n(x) = 0$, де $P_k(x)$ - алгебраїчні многочлени.

Зауваження. Раціональні та ірраціональні функції є алгебраїчними.

5. Трансцендентні функції.

Елементарні функції, які не є алгебраїчними, називаються трансцендентними.

Зауваження. Тригонометричні, показникові та логарифмічні функції є трансцендентними.

4. Графіки основних елементарних функцій

Основними елементарними функціями називають такі функції.

1. Степенева функція $y = x^{\alpha}$**,** $\alpha \in R$.

Область визначення цієї функції та її графік залежать від значення α (рис. 1(а)-(й)). Нехай $\alpha = n$ ціле невід'ємне число. Тоді $y = x^{n}$.

$\alpha = 2k,\ k \in N$

$x \in (-\infty;+\infty),\ y \in [0;+\infty)$.

$\alpha = 2$, $\alpha = 4$, $\alpha = 6$, $\alpha = 8$.

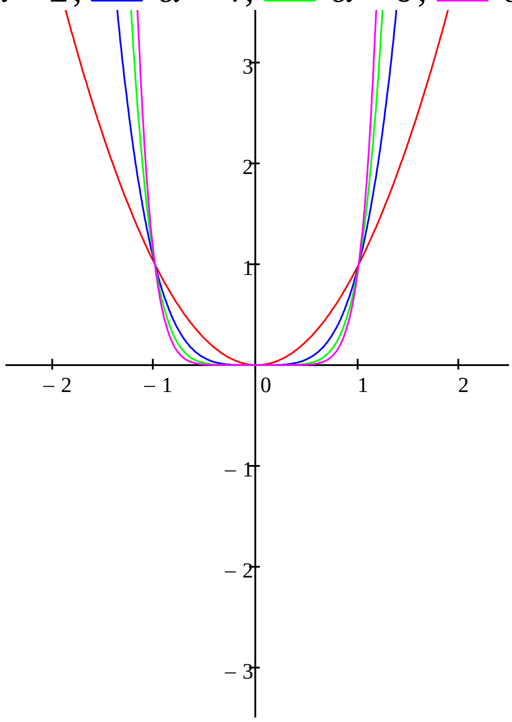


Рис. 1(а)

$\alpha = 2k-1,\ k \in N$

$x \in (-\infty;+\infty),\ y \in (-\infty;+\infty)$.

$\alpha = 1$, $\alpha = 3$, $\alpha = 5$, $\alpha = 7$.

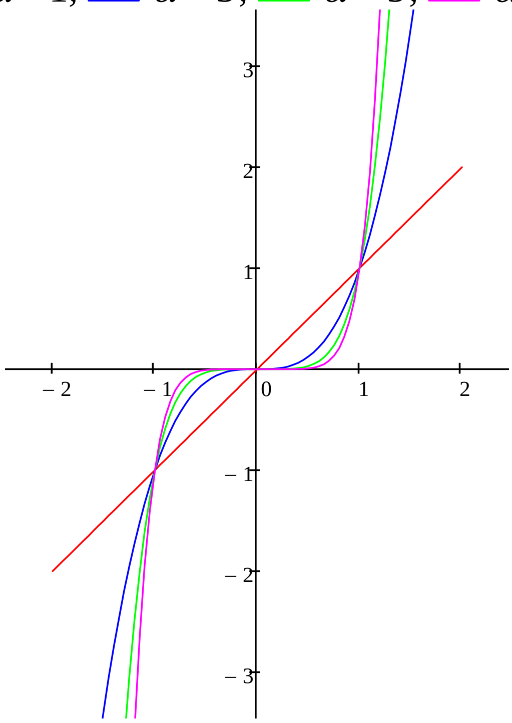


Рис. 1(б)

Нехай $\alpha = -n$ ціле від'ємне число. Тоді $y = \dfrac{1}{x^n}$.

$\alpha = -2k,\ k \in N$

$x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty),\ y \in (0;+\infty).$

—— $\alpha = -2$, —— $\alpha = -4$, —— $\alpha = -6$, —— $\alpha = -8$.

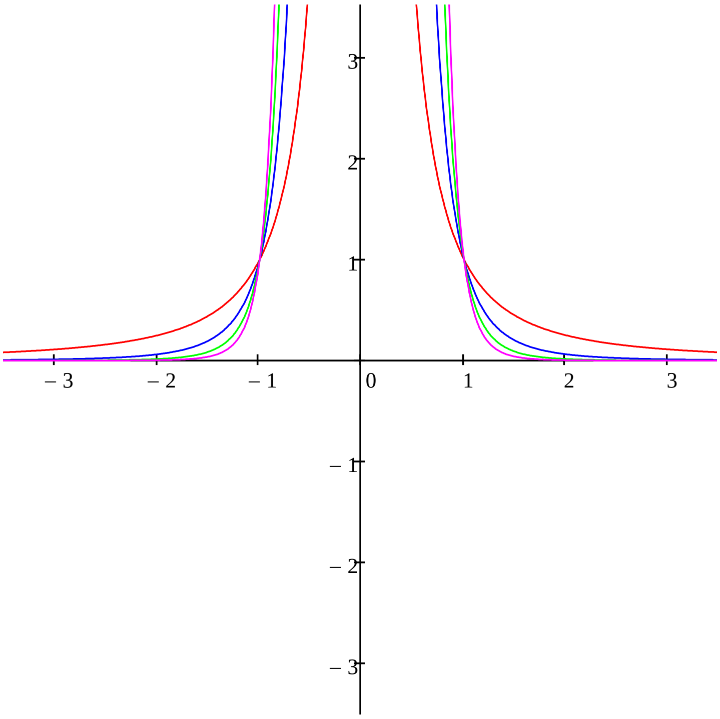


Рис. 1(в)

$\alpha = -2k+1,\ k \in N$

$x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty),\ y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty).$

—— $\alpha = -1$, —— $\alpha = -3$, —— $\alpha = -5$, —— $\alpha = -7$.

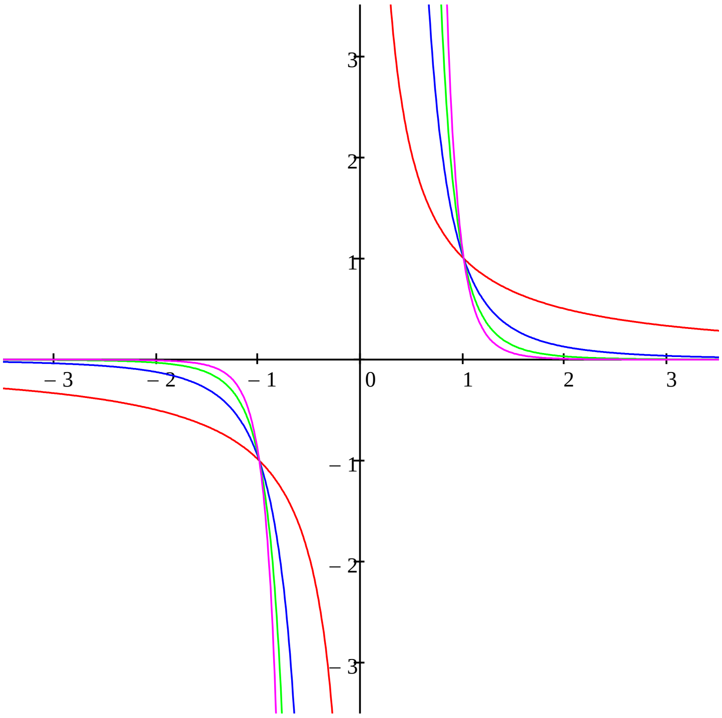


Рис. 1(г)

Нехай $\alpha = \dfrac{1}{n}$, де n натуральне число. Тоді $y = \sqrt[n]{x}$.

$\alpha = \dfrac{1}{2k},\ k \in N$

$x \in [0;+\infty),\ y \in [0;+\infty).$

—— $\alpha = 1/2$, —— $\alpha = 1/4$, —— $\alpha = 1/6$, —— $\alpha = 1/8$.

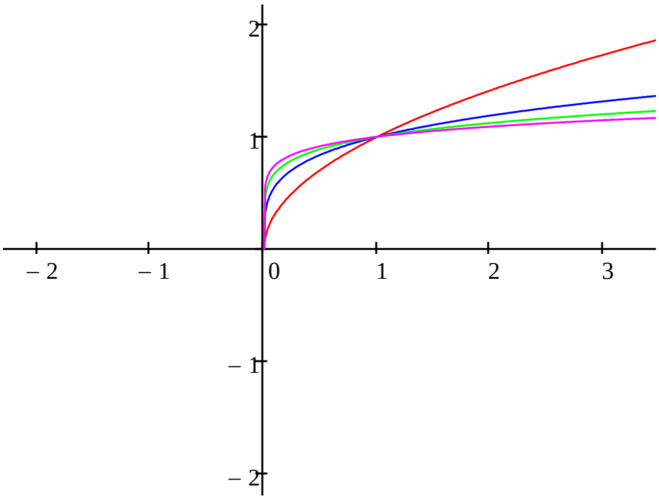


Рис. 1(д)

$\alpha = \dfrac{1}{2k+1},\ k \in N$

$x \in (-\infty;+\infty),\ y \in (-\infty;+\infty).$

—— $\alpha = 1/3$, —— $\alpha = 1/5$, —— $\alpha = 1/7$, —— $\alpha = 1/9$.

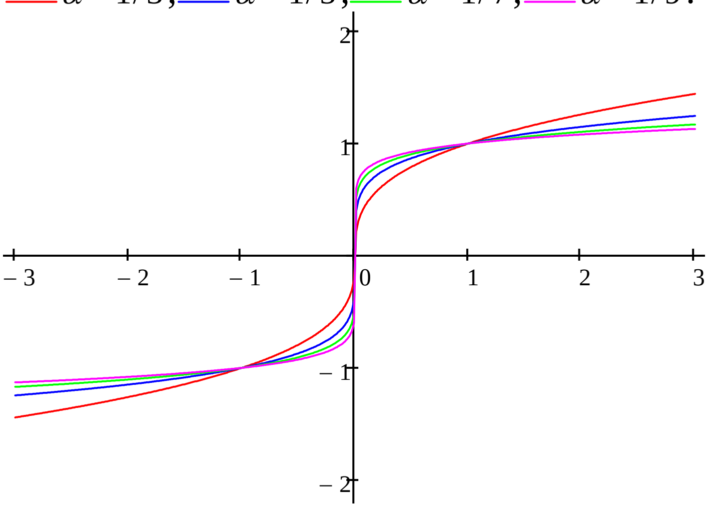


Рис. 1(е)

Нехай $\alpha = \frac{m}{n}$, m і n – взаємно прості натуральні числа. Тоді $y = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$.

$n = 2k,\ k \in N$

$x \in [0;+\infty),\ y \in [0;+\infty).$

— $\alpha = \frac{1}{2}$, — $\alpha = \frac{1}{4}$, — $\alpha = \frac{3}{2}$,

— $\alpha = \frac{11}{4}$.

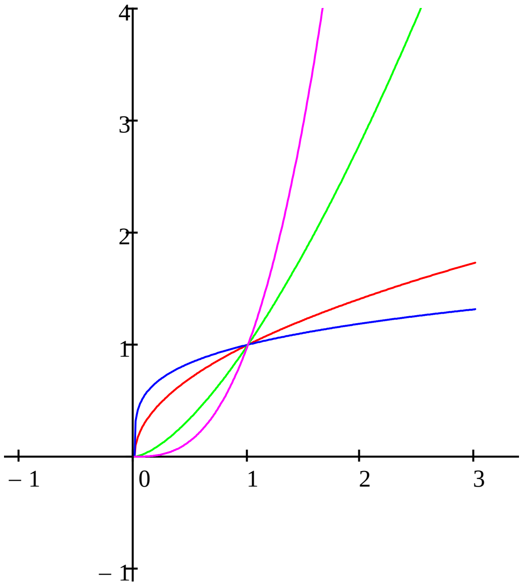


Рис. 1(є)

$n = 2k+1,\ m = 2p,\ k, p \in N$

$x \in (-\infty;+\infty),\ y \in [0;+\infty).$

— $\alpha = \frac{2}{3}$, — $\alpha = \frac{2}{5}$, — $\alpha = \frac{4}{3}$,

— $\alpha = \frac{16}{5}$.

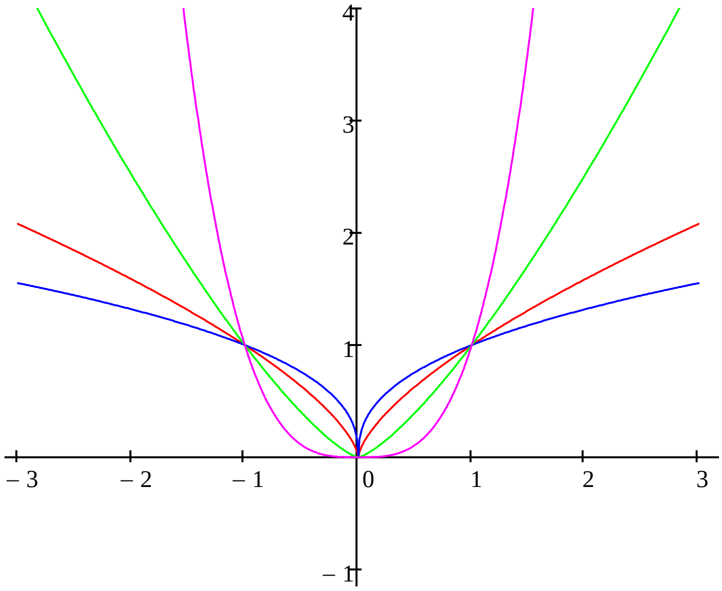


Рис. 1(ж)

$$n = 2k + 1,\ m = 2p + 1,\ k, p \in N$$

$$x \in (-\infty; +\infty),\ y \in (-\infty; +\infty).$$

$$\alpha = \frac{1}{3},\ \alpha = \frac{3}{5},\ \alpha = \frac{5}{3},\ \alpha = \frac{13}{5}.$$

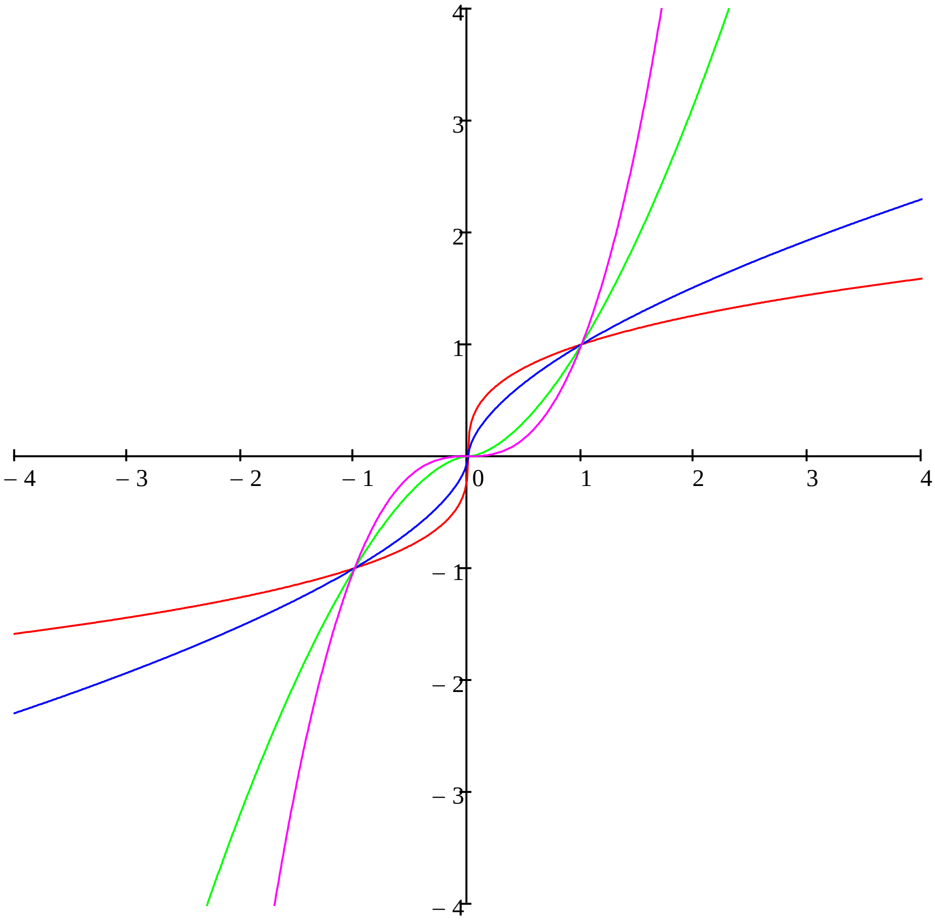


Рис. 1(з)

Нехай $\alpha = -\frac{m}{n}$, m і n – взаємно прості натуральні числа. Тоді $y = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^m}$.

$n = 2k,\ k \in N$. $x \in (0;+\infty)$, $y \in (0;+\infty)$.

— $\alpha = -\frac{1}{2}$, — $\alpha = -\frac{1}{4}$,

— $\alpha = -\frac{3}{2}$, — $\alpha = -\frac{11}{4}$.

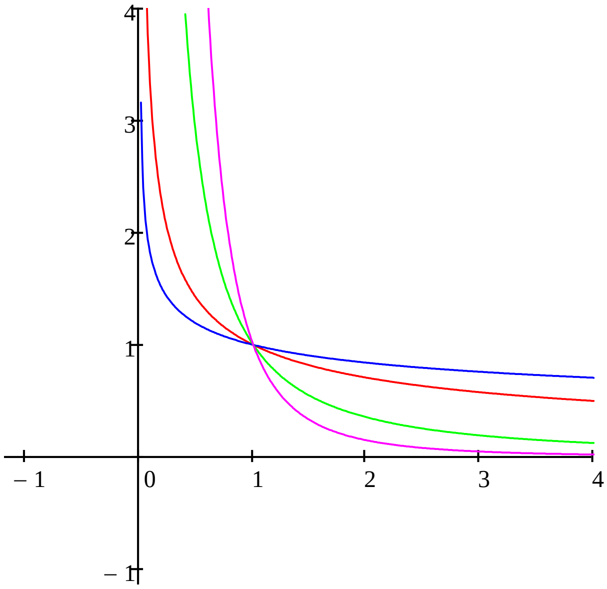


Рис. 1(і)

$n = 2k+1,\ m = 2p,\ k, p \in N$

$x \in (-\infty;0) \cup (0+\infty)$, $y \in (0;+\infty)$.

— $\alpha = -\frac{2}{3}$, — $\alpha = -\frac{2}{5}$, — $\alpha = -\frac{4}{3}$, — $\alpha = -\frac{16}{5}$.

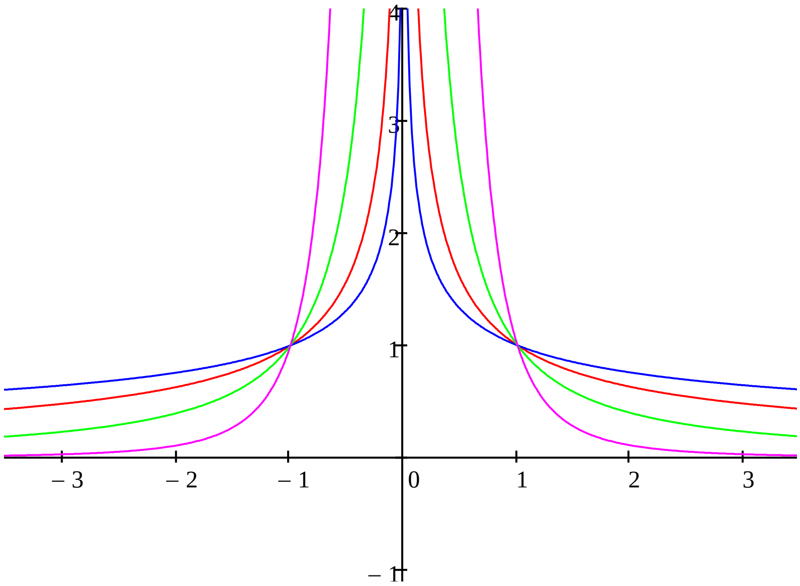


Рис. 1(и)

$$n = 2k + 1, m = 2p + 1, k, p \in N$$
$$x \in (-\infty;0) \cup (0 + \infty),\ y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty).$$
$$\alpha = -\frac{1}{3},\ \alpha = -\frac{3}{5},\ \alpha = -\frac{5}{3},\ \alpha = -\frac{13}{5}.$$

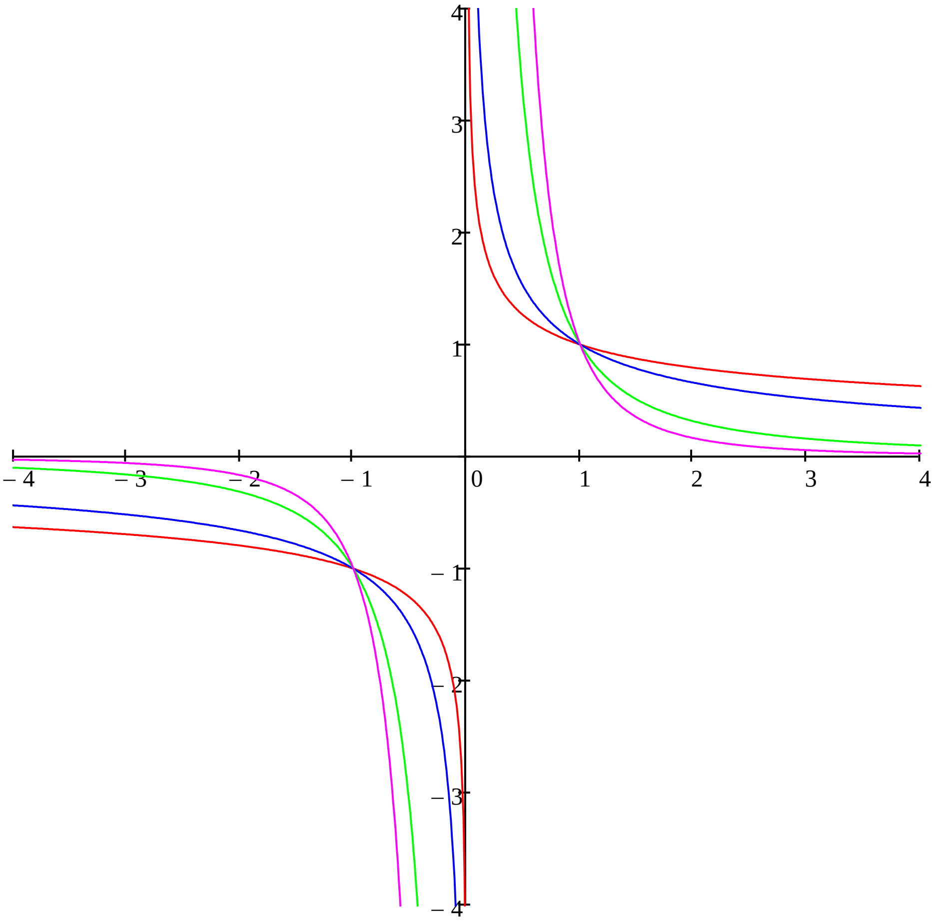
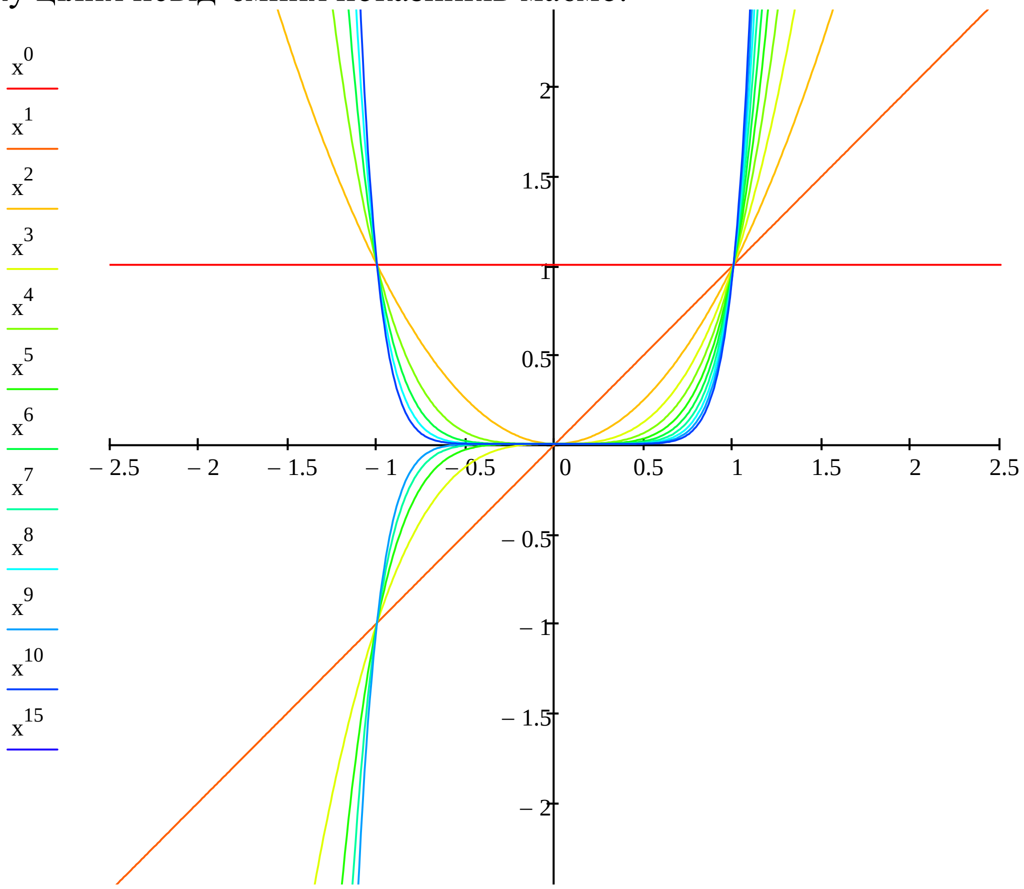
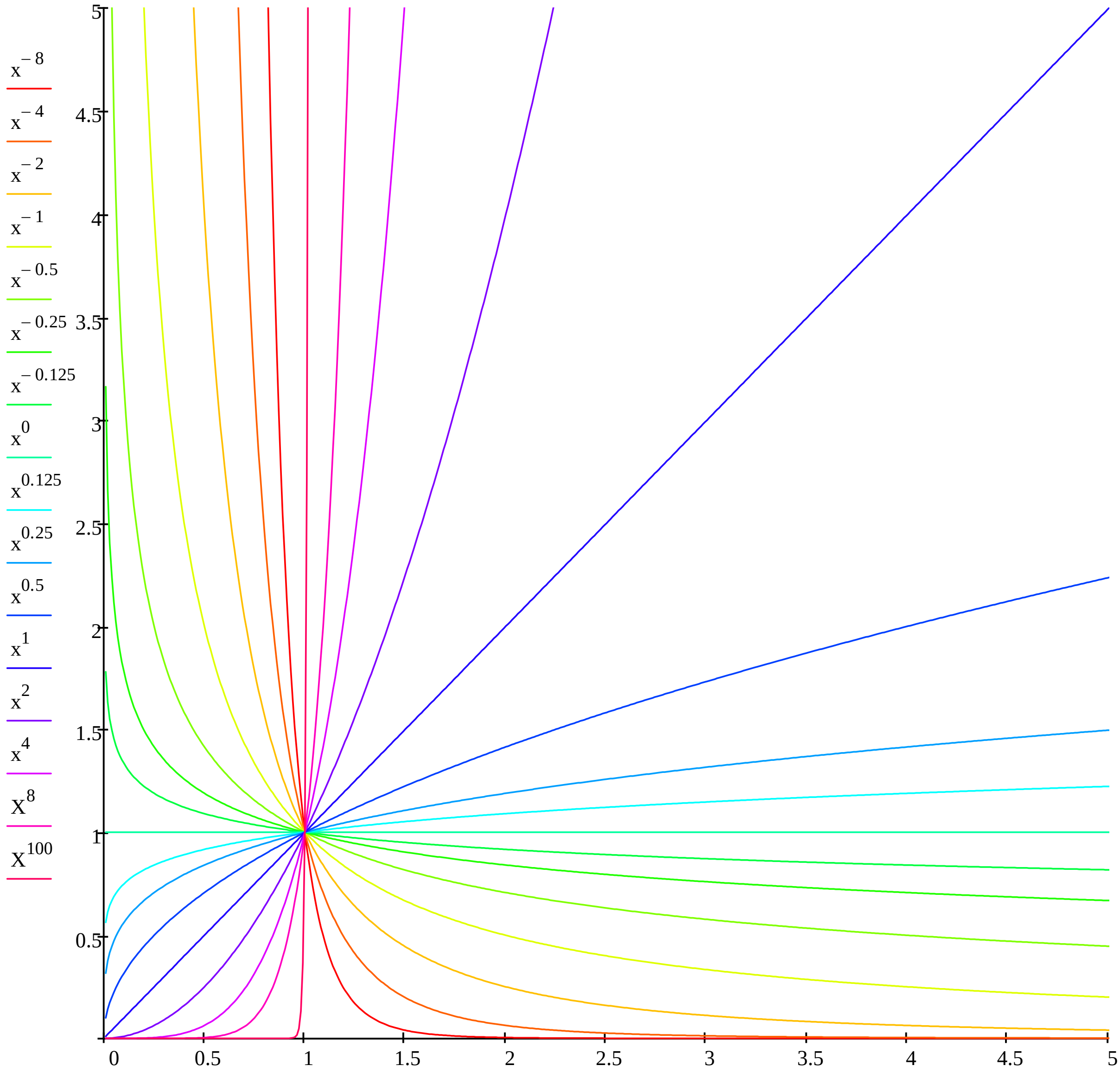


Рис. 1(й)

У випадку цілих невід'ємних показників маємо.



В загальному випадку для додатних x маємо.



2. Показникова функція $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ a \in R$

Графіки показникової функції зображено на рис. 2 (а)–(б).

$a > 1$. $x \in (-\infty;+\infty)$, $y \in (0;+\infty)$.

$a = \frac{5}{3}$, $a = 2$, $a = e$, $a = 4$.

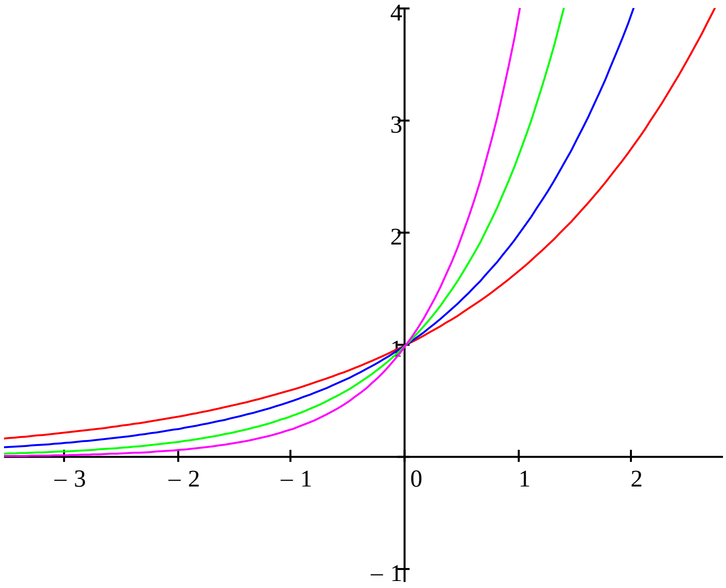


Рис. 2(а)

$0 < a < 1$. $x \in (-\infty;+\infty)$, $y \in (0;+\infty)$.

$a = \frac{3}{5}$, $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{e}$, $a = \frac{1}{4}$.

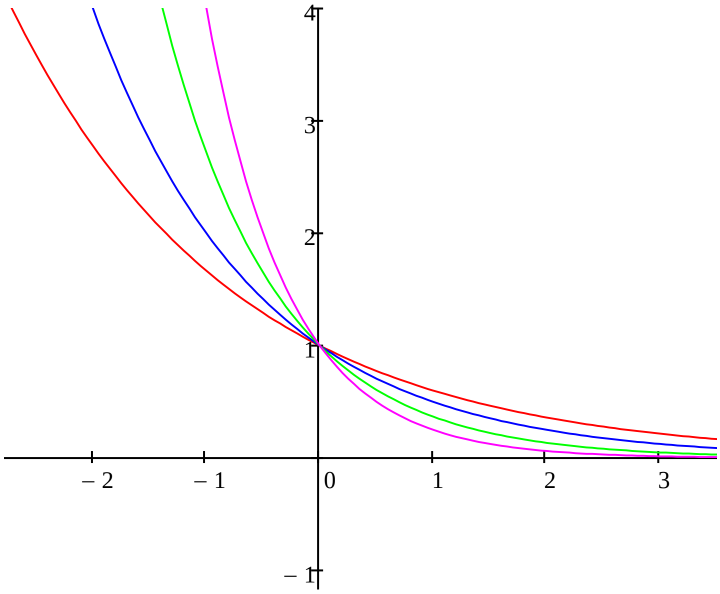


Рис. 2(б)

3. Логарифмічна функція $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ a \in R$.

Графіки логарифмічної функції зображено на рис. 3(а)–(б).

$a > 1$. $x \in (0;+\infty)$, $y \in (-\infty;+\infty)$.

$a = \frac{5}{3}$, $a = 2$, $a = e$, $a = 4$.

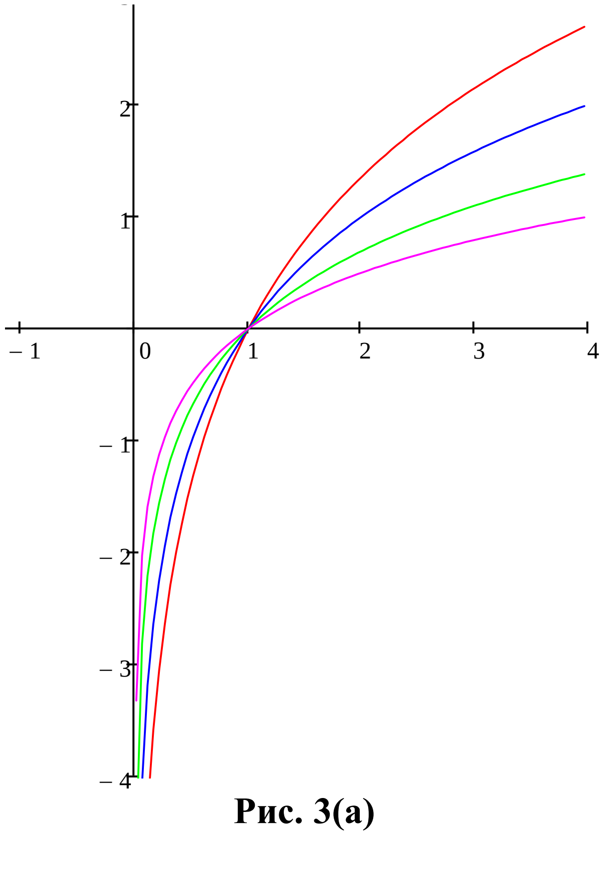


Рис. 3(а)

$0 < a < 1$. $x \in (0;+\infty)$, $y \in (-\infty;+\infty)$.

$a = \frac{3}{5}$, $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{e}$, $a = \frac{1}{4}$.

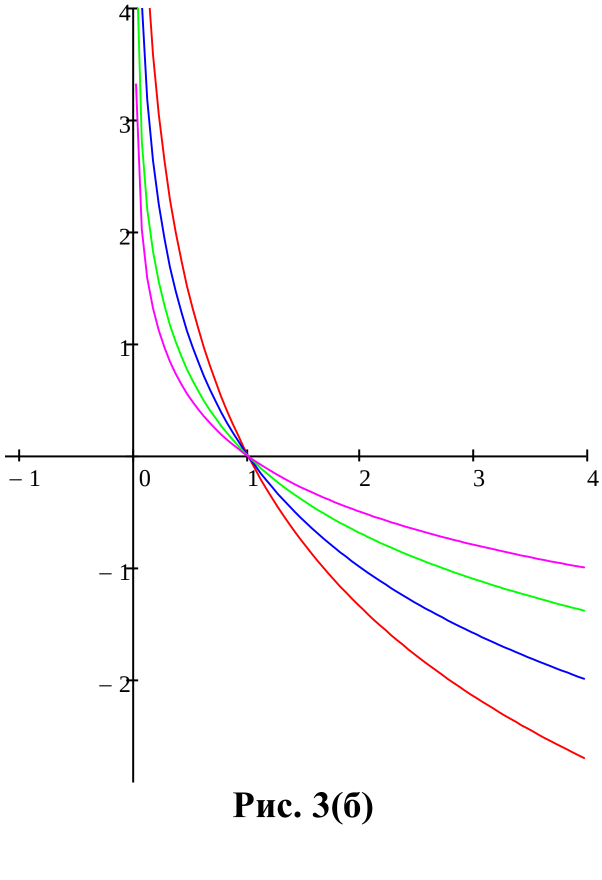


Рис. 3(б)

4. Тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$.

Графіки тригонометричних функцій зображено на рис. 4(а)–(г).

$y = \sin x$. $x \in (-\infty; +\infty)$, $y \in [-1; 1]$. $T = 2\pi$.

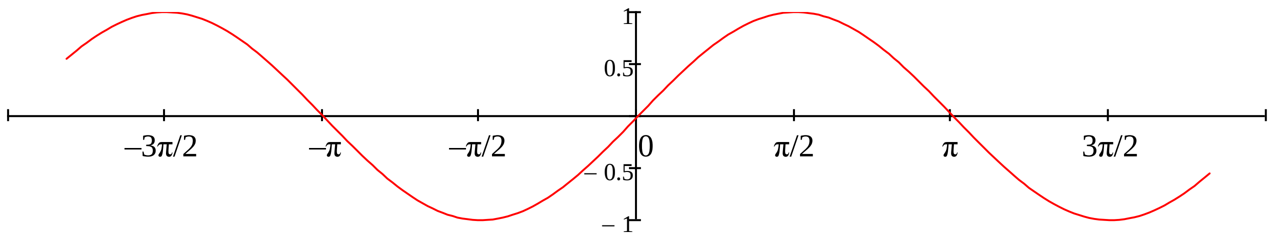


Рис.4(а)

$y = \cos x$. $x \in (-\infty; +\infty)$, $y \in [-1; 1]$. $T = 2\pi$.

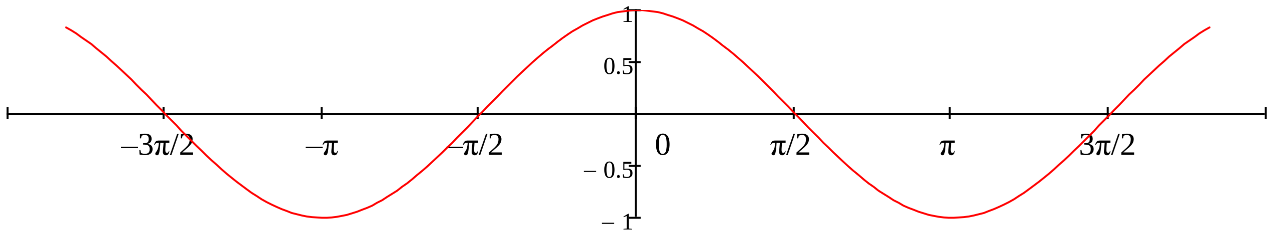


Рис. 4(б)

$y = \mathrm{tg}\, x$. $x \in (-\infty; +\infty)$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, $y \in (-\infty; +\infty)$. $T = \pi$.

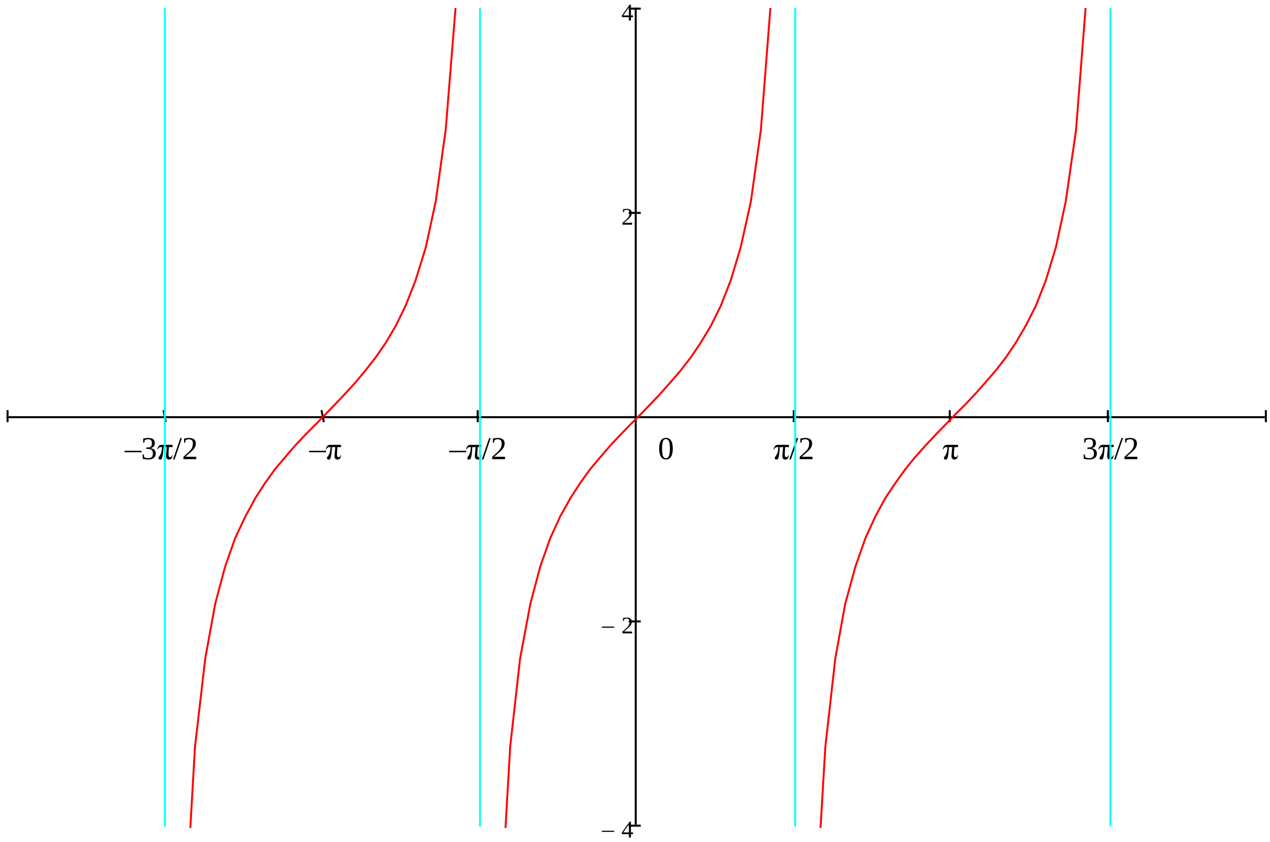


Рис. 4(в)

$y = \mathrm{ctg}\, x$. $x \in (-\infty; +\infty)$, $x \neq \pi k, k \in Z$, $y \in (-\infty; +\infty)$. $T = \pi$.

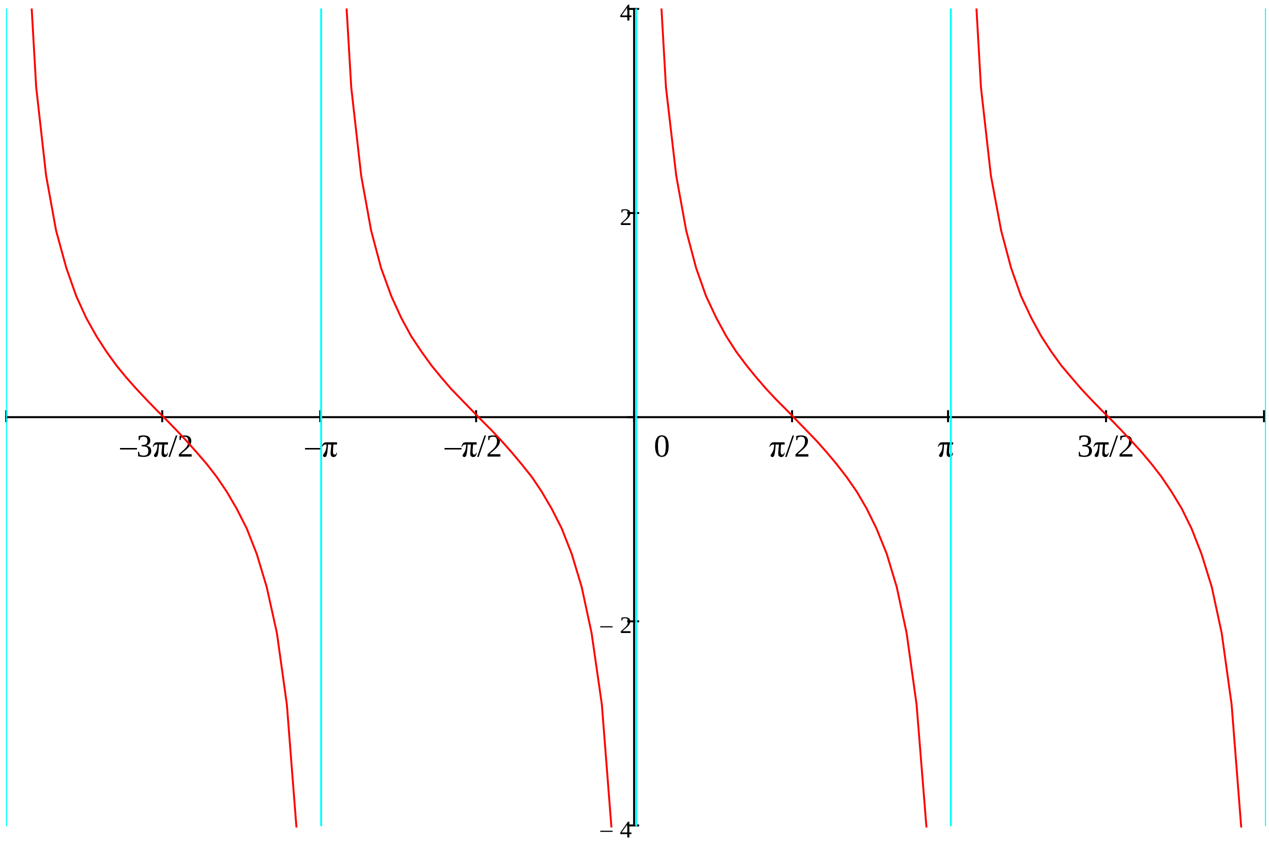


Рис. 4(г)

5. Обернені тригонометричні функції:

$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \mathrm{arctg}\, x,\ y = \mathrm{arcctg}\, x.$$

Графіки обернених тригонометричних функцій зображено на рис. 5(а)–(г).

$y = \arcsin x$, $x \in [-1;1]$, $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$y = \arcsin x$, $x \in [-1;1]$, $y \in [0; \pi]$.

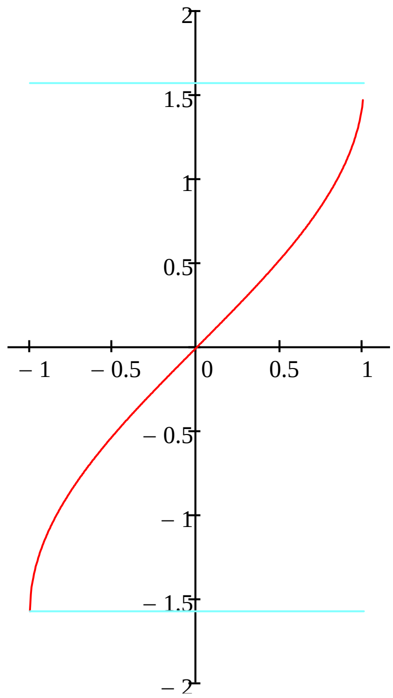


Рис. 5(а)

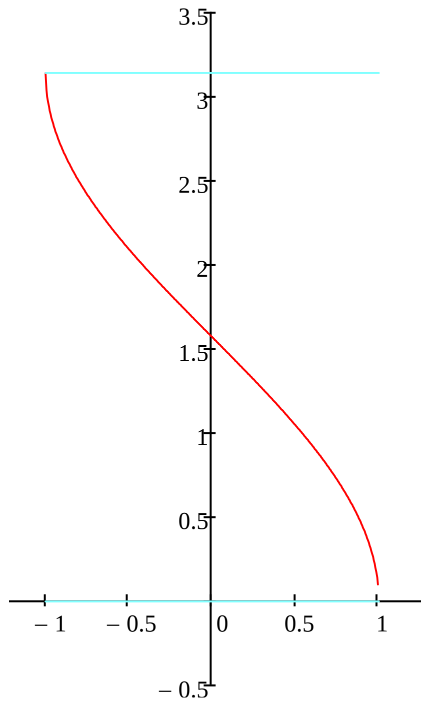


Рис. 5(б)

$y = \text{arctg}\,x$, $\quad x \in (-\infty; +\infty)$, $\; y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

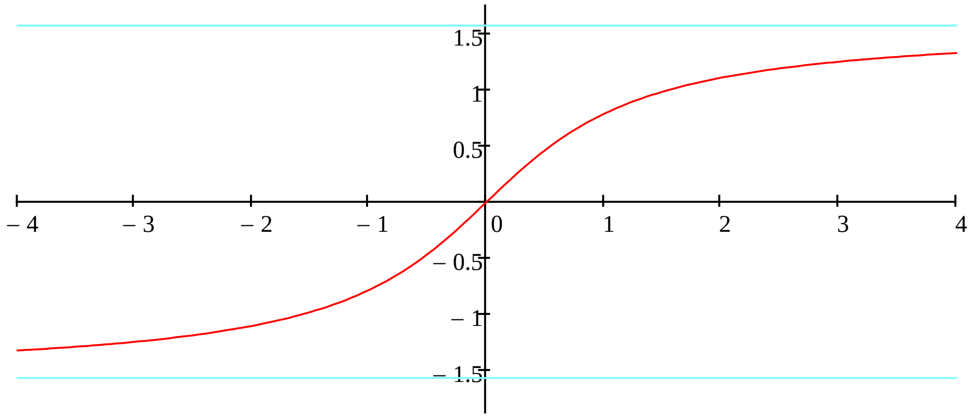


Рис. 5(в)

$y = \text{arcctg}\,x$, $\quad x \in (-\infty; +\infty)$, $\; y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

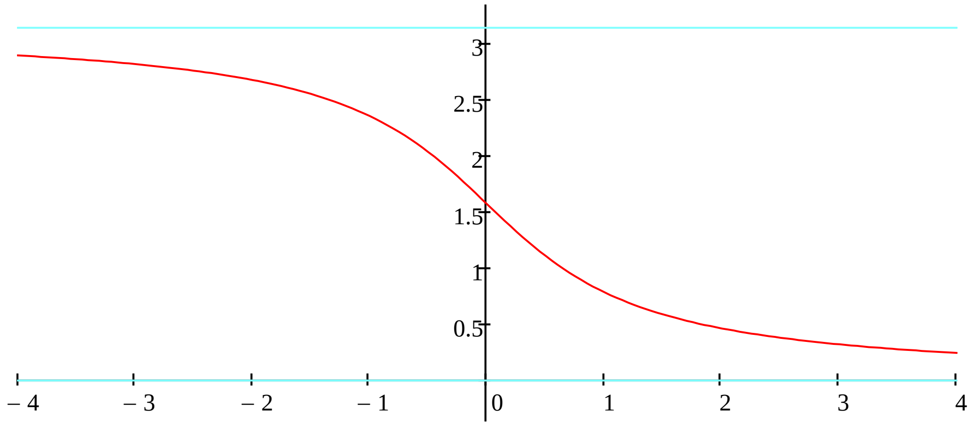


Рис. 5(г)

6. Гіперболічні функції:

$$y=\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ y=\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ y=\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\ y=\operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Графіки гіперболічних функцій зображено на рис. 6(а)–(г).

$y=\operatorname{sh}x$. $x\in(-\infty;+\infty)$, $y\in(-\infty;+\infty)$.

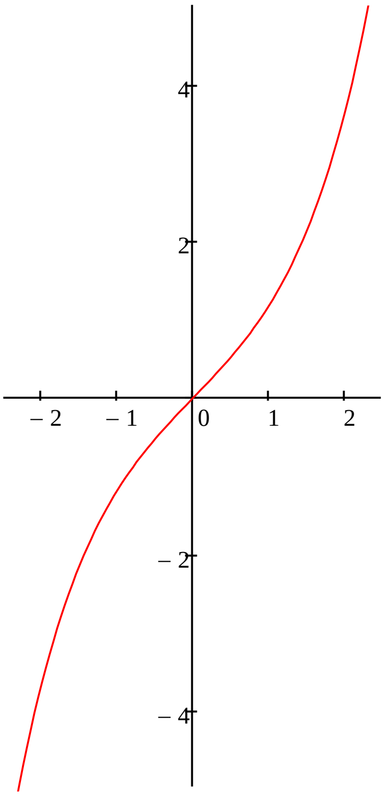


Рис. 6(а)

$y=\operatorname{ch}x$. $x\in(-\infty;+\infty)$, $y\in[1;+\infty)$.

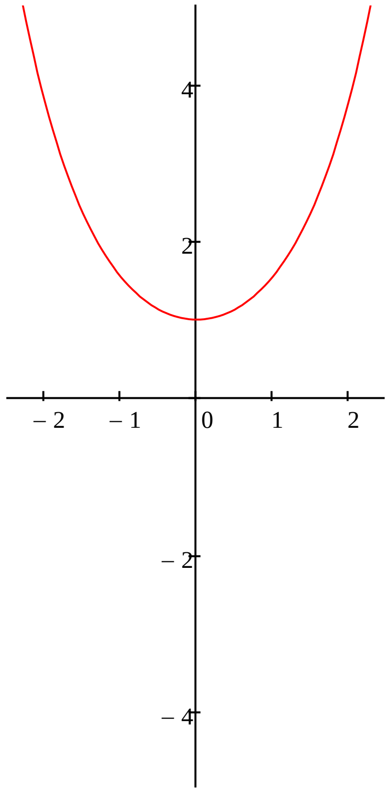


Рис. 6(б)

$y=\operatorname{th}x$.

$x\in(-\infty;+\infty)$, $y\in[-1;1]$.

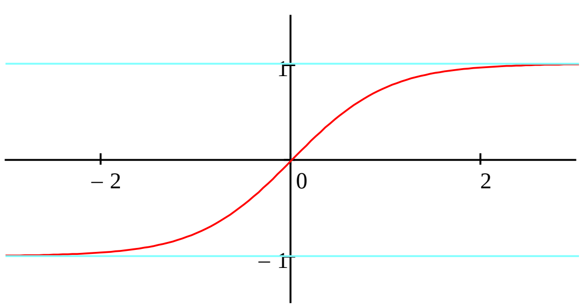


Рис. 6(в)

$y=\operatorname{cth}x$.

$x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $y\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

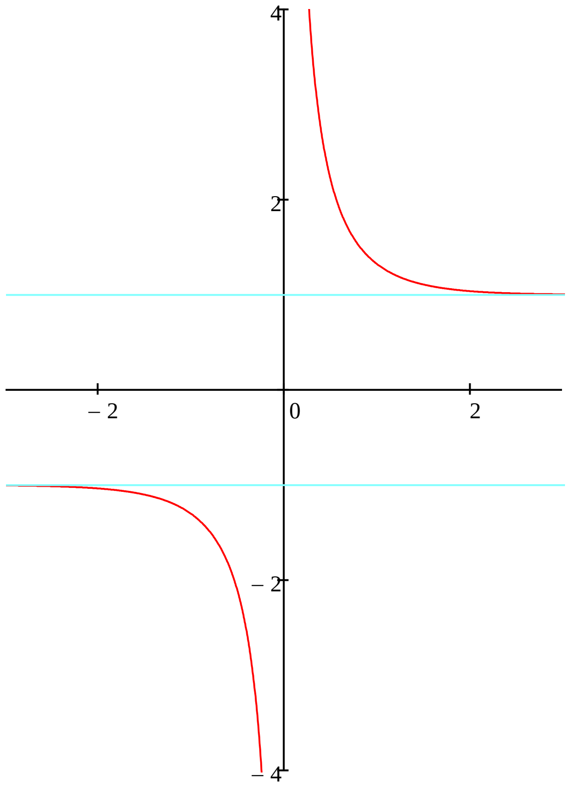


Рис. 6(г)

7. Обернені гіперболічні функції:

$$y = \operatorname{arcsh} x, \; y = \operatorname{arcch} x, \; y = \operatorname{arcth} x, \; y = \operatorname{arccth} x.$$

Графіки гіперболічних функцій зображено на рис. 7(а)–(г).

$y = \operatorname{arcsh} x.$

$x \in (-\infty; +\infty)$, $y \in (-\infty; +\infty)$.

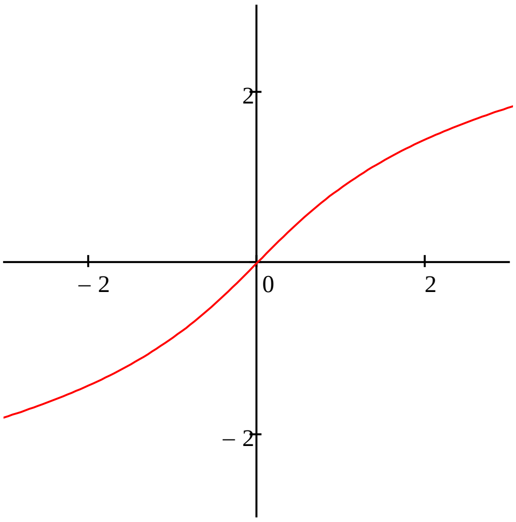


Рис. 7(а)

$y = \operatorname{arcch} x.$

$x \in [1; +\infty)$, $y \in [0; +\infty)$.

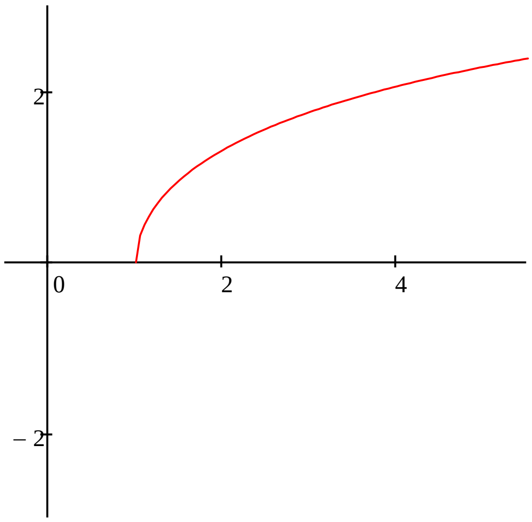


Рис. 7(б)

$y = \operatorname{arcth} x.$

$x \in (-1; 1)$, $y \in (-\infty; +\infty)$.

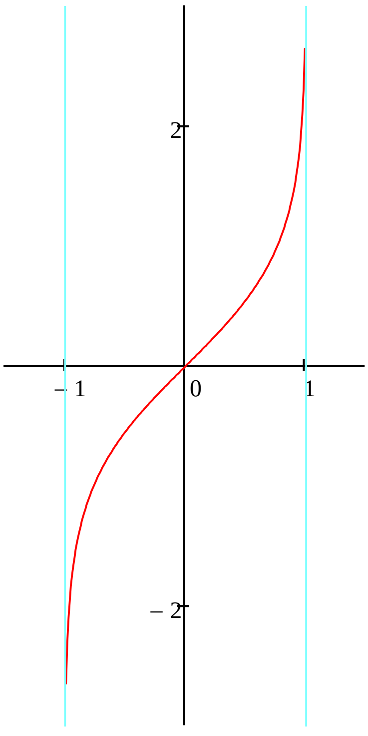


Рис. 7(в)

$y = \operatorname{arccth} x.$

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

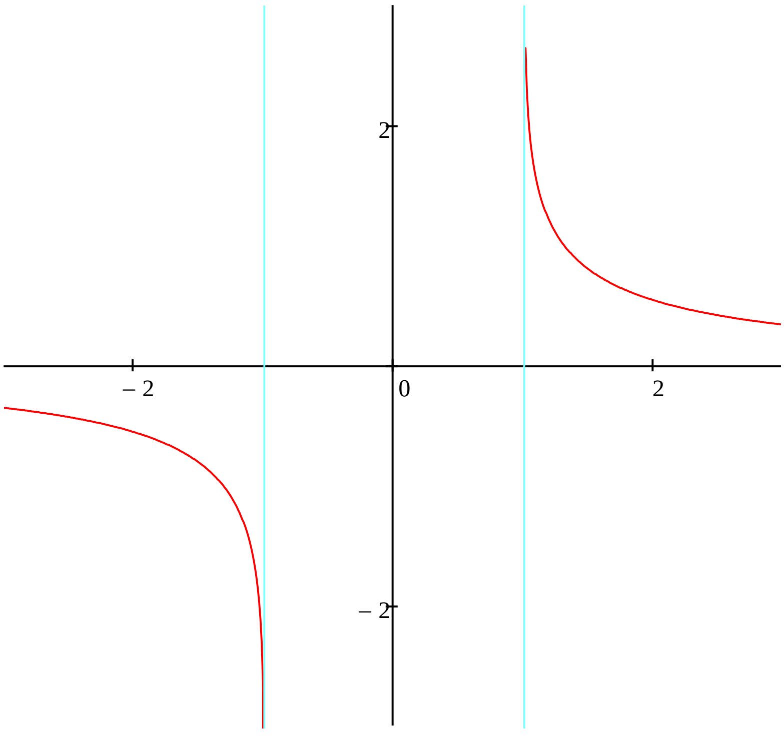


Рис. 7(г)