Лекція №14.

Тема: Границя функції.

План лекції:

1. Границя функції в точці.
2. Односторонні границі.
3. Границя функції на нескінченності.
4. Нескінченні границі.
5. Границя числової послідовності.
6. Критерій існування границі. Властивості функцій, що мають границю в точці. Властивості границь функцій.

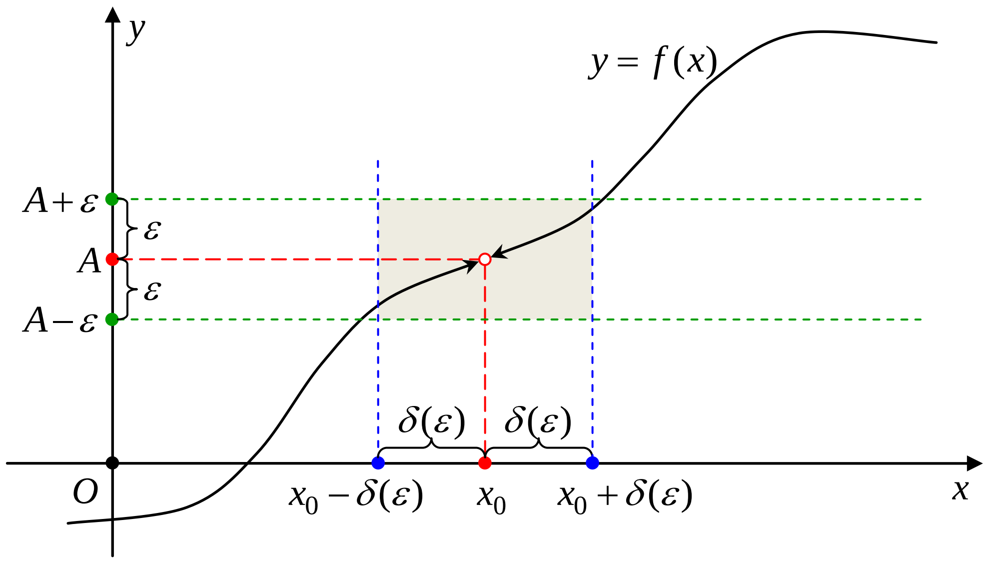
1. <u>Границя функції в точці</u>

Означення 14.1. Нехай функція $f(x)$ визначена в інтервалі $(x_0-\delta_1;x_0+\delta_1)$, $\delta_1>0$, тобто в деякому околі x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Число A називається границею функції $f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta(\varepsilon)>0$ таке. Що з нерівності $0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ випливає нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Символічно записують:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \ \forall x:\big(0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)\big)\Rightarrow\big(|f(x)-A|<\varepsilon\big).$$

Записують так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ або $f(x)\to A(x\to x_0)$.

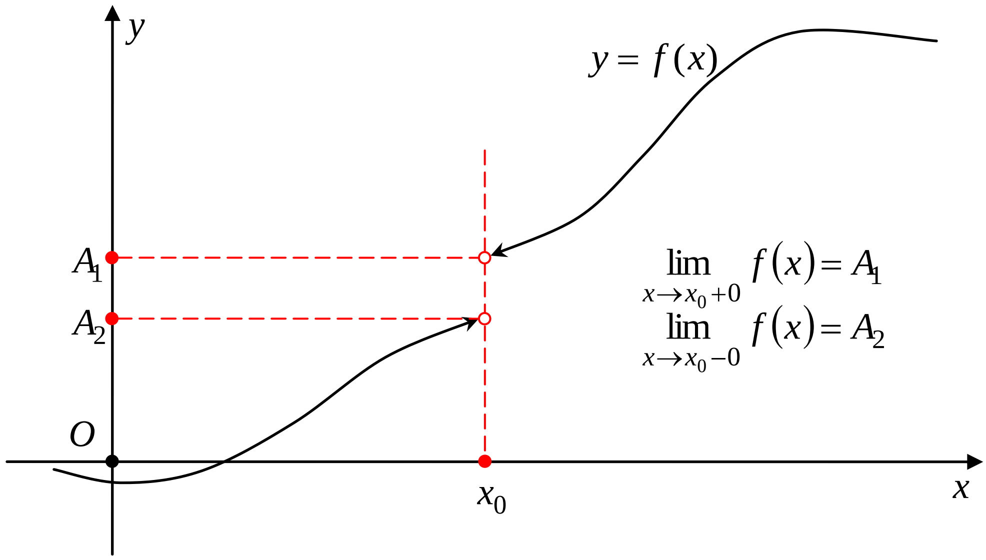


2. <u>Односторонні границі</u>

Нехай $f(x)$ визначена на проміжку $(x_0;x_0+\delta)$ (на проміжку $(x_0-\delta;x)$), $\delta>0$. Число A називається правою (лівою) границею $f(x)$ в точці x_0, коли для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ таке, що з нерівності $0<x-x_0<\delta$ $(0<x_0-x<\delta)$ випливає нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Записують так: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$ – права границя,

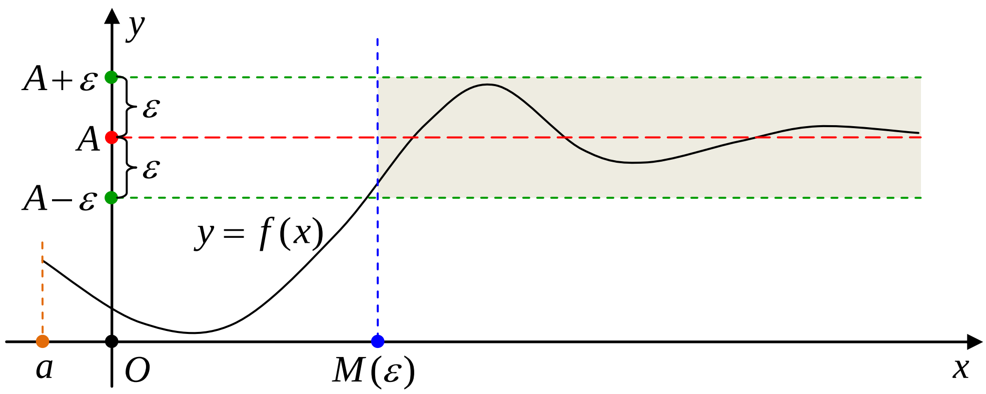
$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$ – ліва границя.



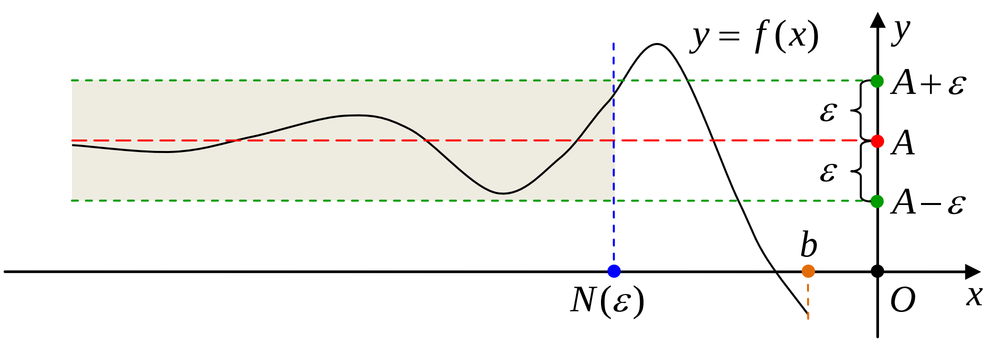
Теорема 14.1. Для того щоб функція $f(x)$ в точці x_0 мала границю необхідно і достатньо, щоб у цій точці $f(x)$ мала праву і ліву границі і щоб ці границі були рівні між собою.

3. Границя функції на нескінченності

Означення 14.2. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;+\infty)$. Число A називається границею $f(x)$ при $x\to+\infty$ (записують $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$), якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує $M(\varepsilon)\ge a$ таке, що нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$ виконується для всіх x, які задовольняють умову $x>M(\varepsilon)$.



Означення 14.3. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty;b)$. Число B називається границею $f(x)$ при $x\to-\infty$ (записують $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B$), якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує $N(\varepsilon)\le b$ таке, що нерівність $|f(x)-B|<\varepsilon$ виконується для всіх x, які задовольняють умову $x<N(\varepsilon)$.



Зауваження. Якщо $f(x)$ у «+» і у «-» нескінченно віддалених точках має однакові границі, то в цьому випадку запис має вигляд $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ або $f(x) \to A(x\to\infty)$.

4. <u>Нескінченні границі</u>

Означення 14.4. Нехай функція $f(x)$ визначена в інтервалі $(x_0-\delta_1; x_0+\delta_1)$, $\delta_1 > 0$, за винятком, можливо, самої точки x_0. Вважають, що функція $f(x)$ в точці x_0 має нескінченну границю, яка дорівнює

а) $+\infty$, б) $-\infty$, в) ∞,

якщо для будь-якого числа $M>0$ існує число $\delta(M)>0$ ($\delta(M)<\delta_1$) таке, що для всіх x, що задовольняють нерівності $0<|x-x_0|<\delta(M)$, виконується відповідно нерівність:

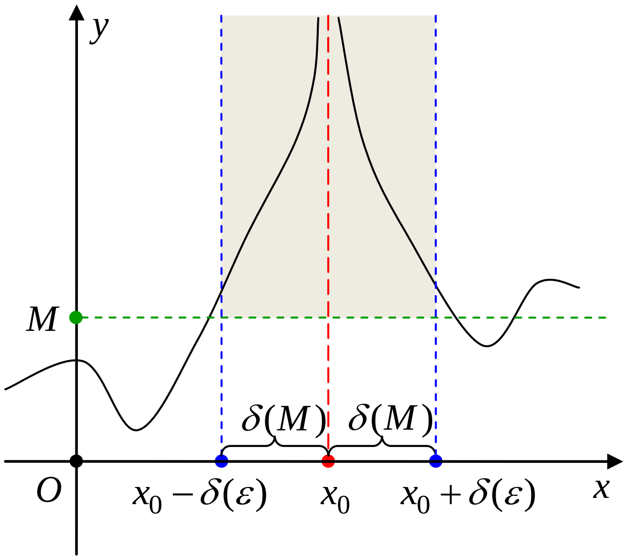
а) $f(x)>M$, б) $f(x)<-M$, в) $|f(x)|>M$.

Символічний запис у цьому випадку має відповідно вигляд:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ або $f(x)\to+\infty\,(x\to x_0)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ або $f(x)\to-\infty\,(x\to x_0)$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ або $f(x)\to\infty\,(x\to x_0)$.



5. <u>Границя числової послідовності</u>

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині натуральних чисел N. Така функція називається числовою послідовністю, або просто послідовністю. Якщо позначимо $f(n)$ через y_n, то числову послідовність можна записати у вигляді

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots,$$

де y_1 – перший член послідовності, y_2 – другий член послідовності, y_n - n-й член послідовності.

Означення 14.5. Число A називається границею числової послідовності $\{y_n\}$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує натуральне число $n_0(\varepsilon)$ таке, що нерівність $|y_n-A|<\varepsilon$ виконується для всіх $n>n_0(\varepsilon)$.

Записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ або $y_n \to A(n\to\infty)$.

Приклад 14.1. Показати, що границею послідовності $\{y_n\} = \left\{\dfrac{3n+1}{2n+5}\right\}$ є $\dfrac{3}{2}$.

Розв'язок. Використовуючи означення границі числової послідовності, покажемо, що для будь-якого для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $n_0(\varepsilon)$ таке, що нерівність $\left|y_n - \dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon$ виконується для всіх $n > n_0(\varepsilon)$.

$$\left|\frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{6n+2-6n-15}{2(2n+5)}\right| = \left|\frac{-13}{2(2n+5)}\right| = \frac{13}{4n+10} < \varepsilon;$$

$$\frac{13}{4n+10} < \varepsilon \Rightarrow 4n+10 > \frac{13}{\varepsilon} \Rightarrow 4n > \frac{13}{\varepsilon} - 10 \Rightarrow n > \frac{1}{4}\left(\frac{13}{\varepsilon} - 10\right)$$

$n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{13}{\varepsilon} - 10\right)\right]$, де квадратні дужки означають цілу частину числа.

Отже, для всіх $n > n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{13}{\varepsilon} - 10\right)\right]$ виконується нерівність $\left|y_n - \dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{2n+5} = \dfrac{3}{2}$.

6. Критерій існування границі. Властивості функцій, що мають границю в точці. Властивості границь функцій

Теорема 14.2. Для того щоб функція $f(x)$, визначена на множині E, в граничній точці x_0 цієї множини скінченно чи нескінченно віддаленій, мала границю A необхідно і достатньо, щоб для будь-якої послідовності точок $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$ $(n = 1,2,\ldots)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ справджується рівність $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Властивості функцій, що мають границю в точці.

1) Функція не може мати двох різних границь в одній точці.
2) Якщо в деякому околі точки x_0, крім можливо самої точки x_0, виконується нерівність $f(x) \leq \varphi(x)$ і кожна з функцій має границю в точці x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$.
3) Нехай в деякому околі точки x_0 окрім, можливо, самої точки x_0, $f(x) \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$. Якщо функції $f(x)$ і $\psi(x)$ мають границю в точці x_0, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = A$, то функція $\varphi(x)$ також має границю в точці x_0 і $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$.

Властивості границь функцій.

Властивості границь функцій наведемо як теореми, які приймемо без доведення:

Теорема 14.3. Границя сталої в довільній точці x_0 дорівнює цій сталі $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.

Теорема 14.4. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають в точці x_0 скінченні границі, то в цій точці мають також скінченні границі їх сума, різниця, добуток і частка і справедливими є наступні формули:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ $\quad (g(x)\neq 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0)$.

Наслідок 1. Сталий множник можна виносити за знак границі: $\lim\limits_{x\to x_0}(C\cdot f(x))=C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, де $C=const$.

Наслідок 2. Якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то для будь-якого натурального m $(m\in N)$

справедлива рівність: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^m=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^m$.

При знаходженні границь функцій використовують наступні правила:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c}{x}=\infty$;	$\lim\limits_{x\to -\infty} c^x=\begin{cases}+\infty, & 0<c<1;\\ 0, & c>1.\end{cases}$
$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{c}=\infty$;	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\log_c f(x)\right)=\log_c\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right),\ c>1$;
$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{c}{x}=0$;	$\lim\limits_{x\to 0}\log_c x=-\infty,\ c>1$;
$\lim\limits_{x\to +\infty} c^x=\begin{cases}0, & 0<c<1;\\ +\infty, & c>1;\end{cases}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\log_c x=+\infty,\ c>1$.

Приклад 14.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}3x-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^2+1}=0-0=0$.

Приклад 14.3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2-4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}==\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+24}=\dfrac{1}{4}$.

Приклад 14.4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{4}{3}$.