Лекція №1.

Тема: Функція двох незалежних змінних.

План лекції:

1. Функція двох незалежних змінних. Границя. Неперервність.
2. Похідна та диференціал функції двох незалежних змінних.
3. Похідні та диференціали вищих порядків.

1. Функція двох незалежних змінних. Границя. Неперервність.

Означення 1.1. Нехай задано множину D упорядкованих пар чисел (x, y). Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом відповідає число z, то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x і y і записують $z = f(x, y)$. x і y називають незалежними змінними або аргументами функції z.

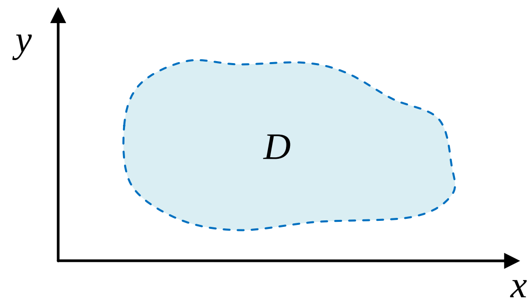
Означення 1.2. Множину пар (x, y) значень x та y, для яких $z = f(x, y)$ визначена, називають областю визначення цієї функції і позначають $D(f)$ або просто D.

Область визначення функції $z = f(x, y)$ є деяка множина точок площини XOY. Зокрема, область визначення може бути вся площина XOY або частина площини XOY, обмежена певними лініями.

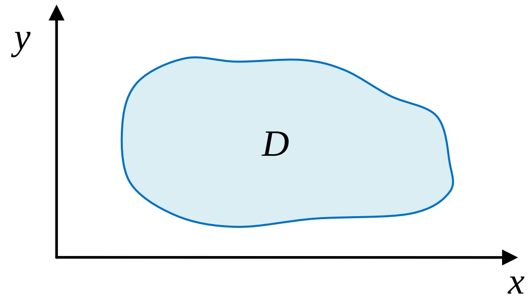
Означення 1.3. Лінію, яка обмежую область D, називають межею області визначення.

Означення 1.4. Точки області, які не лежать на її межі, називають внутрішніми.

Означення 1.5. Область, яка містить лише внутрішні точки, називається відкритою.

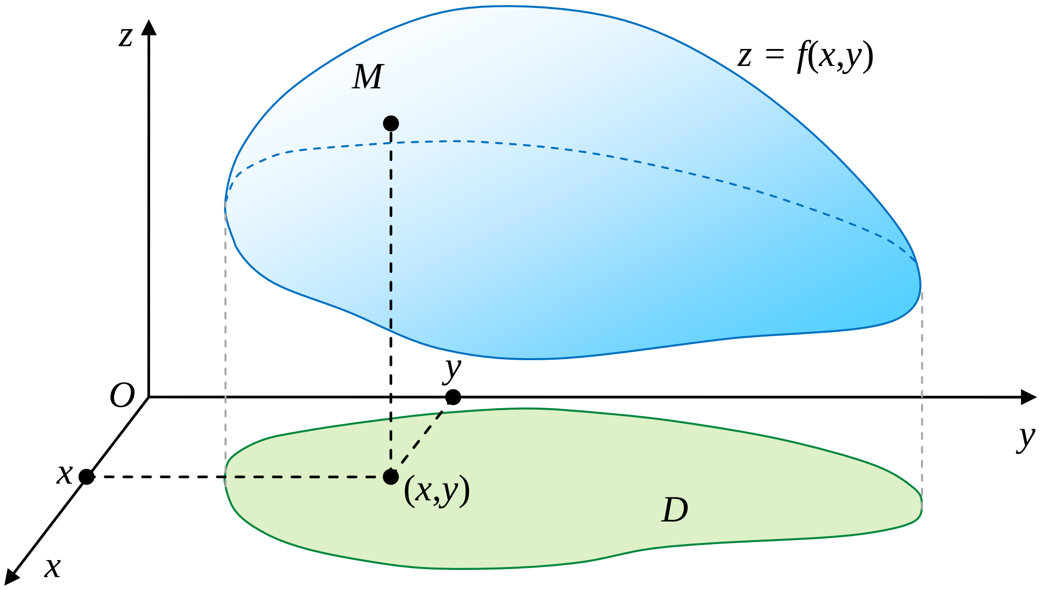


Означення 1.6. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається замкненою.



Функція двох змінних може бути задана різними способами (табличним, аналітичним, графічним). Ми будемо користуватись аналітичним заданням, тобто коли функція задана за допомогою формули.

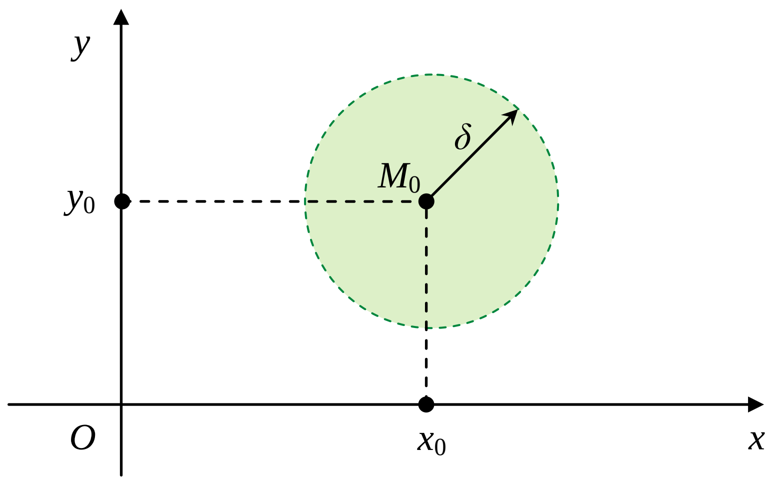
Функція двох змінних можна зобразити графічно у вигляді деякої поверхні.



Означення 1.7. Графіком функції $z = f(x, y)$ в прямокутній системі XOY називається геометричне місце точок $M(x; y; f(x, y))$, проекції яких $(x; y)$ належать область D.

Границя функції двох змінних.

Введемо поняття δ-околу точки $M_0(x_0; y_0)$.



Означення 1.8. δ-окіл точки $M_0(x_0; y_0)$ це всі внутрішні точки круга з центром M_0 і радіусом δ.

Означення 1.9. Число A називають границею функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо для $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число δ, що для всіх точок $M(x; y) \in D$, які задовольняють умову $0 < |MM_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$. Записують так: $\lim\limits_{M \to M_0} f(x, y) = A$ або $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Неперервність функції двох змінних.

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена на множині D. Точка $M_0\in D$ і довільний δ-окіл точки $M_0(x_0;y_0)$ містить точки множини D.

Означення 1.10. $z=f(x,y)$ називають неперервною в точці M_0, якщо $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)=f(M_0)=f(x_0,y_0)$.

Точки, в яких функція неперервна називаються *точками неперервності*, а точки, в яких неперервність порушується – *точками розриву*.

Означення 1.11.Функція $z=f(x,y)$ називається неперервною в області D, якщо вона неперервна в кожній точці даної області.

2. <u>Похідна та диференціал функції двох незалежних змінних.</u>

Нехай $z=f(x,y)$ функція двох змінних x та y. Будемо вважати, що змінна x набула приросту Δx, а змінна y при цьому залишається незмінною. Тоді різницю:

$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=\Delta z_x$ - називають частинним приростом функції по змінній x. Аналогічно різницю:

$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta z_y$ - називають частинним приростом функції по змінній y.

Складемо відношення $\dfrac{\Delta z_x}{\Delta x}$ та $\dfrac{\Delta z_y}{\Delta y}$ і знайдемо їх границі, коли відповідно $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$:

$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\Delta z_x}{\Delta x}=z'_x,\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial x},f'_x}$ - частинна похідна по змінній x від функції $z=f(x,y)$;

$\boxed{\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{\Delta z_y}{\Delta x}=z'_y,\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial y},f'_y}$ - частинна похідна по змінній y від функції $z=f(x,y)$;

Правило знаходження частинних похідних.

Щоб знайти z'_x або z'_y знаходять звичайну похідну функції однієї змінної, вважаючи іншу змінну константою.

Приклад 1.1. Знайти частинні похідні z'_x,z'_y від функції $z=3y^3+7xy+\cos y$.

Розв'язок:

$$z'_x\Big|_{y=const}=\left(3y^3+7xy+\cos y\right)'_x=\left(3y^3\right)'_x+(7xy)'_x+(\cos y)'_x=0+7y+0=7y;$$

$$z'_y\Big|_{x=const}=\left(3y^3+7xy+\cos y\right)'_y=\left(3y^3\right)'_y+(7xy)'_y+(\cos y)'_y=y^2+7x-\sin y.$$

Приклад 1.2. Знайти частинні похідні z'_x, z'_y від функції $z = \cos y \cdot \left(9x^4 + y^2\right)$.

Розв'язок:

$$z'_x\Big|_{y=const} = \left(\cos y \cdot \left(9x^4 + y^2\right)\right)'_x = \cos y \cdot \left(9x^4 + y^2\right)'_x = \cos y\left(36x^2 + 0\right) = 36x^2 \cos y;$$

$$z'_y\Big|_{x=const} = \left(\cos y \cdot \left(9x^4 + y^2\right)\right)'_y = \left(\cos y\right)'_y \cdot \left(9x^4 + y^2\right) + \cos y\left(9x^4 + y^2\right)'_y =$$

$$= -\sin y\left(9x^4 + y^2\right) + \cos y\left(0 + 2y\right) = -\sin y\left(9x^4 + y^2\right) + 2y\cos y.$$

Частинні диференціали.

Частинний диференціал функції двох незалежних змінних $z = f(x, y)$ рівний добутку відповідної частинної похідної z'_x або z'_y на диференціал цієї змінної.

Позначають: $d_x z = z'_x dx$, $d_y z = z'_y dx$.

Повний диференціал функції двох незалежних змінних.

Повний приріст функції двох незалежних змінних $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Означення 1.12. Функція $z = f(x, y)$ називається диференційованою в точці $M(x; y)$, якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$, де A і B - дійсні числа, що не залежать від Δx і Δy, α і β нескінченно малі функції від Δx і Δy: $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0$ і $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Теорема 1.1. Якщо $z = f(x, y)$ диференційована в точці $M(x; y)$, то вона має в цій точці частинні похідні і її приріст $\Delta z = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$.

Наслідок. Щоб функція $z = f(x, y)$ була диференційованою в точці, необхідно, щоб вона мала в цій точці частинні похідні і достатньо, щоб вона була в цій точці неперервна.

Означення 1.13. Повним диференціалом dz диференційованої в точці $M(x; y)$ функції $z = f(x, y)$ називається лінійна відносно Δx і Δy частина повного приросту цієї функції в точці $M(x; y)$.

$$dz = A\Delta x + B\Delta y = \left|\textit{За теоремою } 1.1.\right| = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y = \left|\Delta x = dx, \Delta y = dy\right| =$$
$$= z'_x dx + z'_y dy,$$

$$\boxed{dz = z'_x dx + z'_y dy}.$$

Приклад 1.3. Знайти dz для функції $z = 3axy - x^3 - y^3$.

Розв'язок:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \left(3ay - 3x^2\right)dx + \left(3ax - 3y^2\right)dy.$$

Приклад 1.4. Знайти dz для функції $z =^{y}$.

Розв'язок:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy.$$

Застосування повного диференціала до наближених обчислень.

Розглянемо приріст функції $z = f(x,y)$ та її диференціал у точці $M(x_0, y_0)$:

$$\begin{cases} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y \\ dz = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy. \end{cases}$$

При малих значеннях $\Delta x, \Delta y$ повний приріст функції в точці M_0 наближено дорівнює диференціалу функції в цій точці:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \approx f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Отже, формула для наближеного обчислення значення функції в точці $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ має вигляд:

$$\boxed{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y.}$$

Приклад 1.5. Обчислити наближено $arctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$.

Розв'язок:

Обчислимо наближено значення функції $z = arctg\left(\frac{x}{y} - 1\right)$ при $x = 1{,}97;\ y = 1{,}02$.

$$x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y,$$
$$1{,}97 = 2 - 0{,}03 \Rightarrow x_0 = 2, \Delta x = -0{,}03,$$
$$1{,}02 = 1 + 0{,}02 \Rightarrow y_0 = 1, \Delta y = 0{,}02.$$

Щоб застосувати формулу для наближеного обчислення $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$ знайдемо $f(x_0,y_0)$, $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$.

$$f(x_0,y_0) = arctg\left(\frac{2}{1} - 1\right) = arctg 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$f'_x = arctg\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_x = \frac{1}{1 + \frac{(x-y)^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + (x-y)^2},$$

$$f'_x(x_0,y_0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

$$f'_y = arctg\left(\frac{x}{y}-1\right)'_y = \frac{1}{1+\frac{(x-y)^2}{y^2}}\cdot\frac{-x}{y} = \frac{-x}{y^2+(x-y)^2},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{-2}{1+1} = -2.$$

$$arctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02}-1\right) \approx \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot(-0{,}03)-2\cdot 0{,}02 = \frac{3{,}14}{4}-0{,}015-0{,}02 = 0{,}75.$$

3. Похідні та диференціали вищих порядків.

Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ можна розглядати як функції від $(x,\ y)\in D$. Кожна похідна першого порядку має дві частинні похідні, які називають частинними похідними другого порядку або другими частинними похідними. Отже, частинних похідних другого порядку буде чотири, їх позначають так:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}};$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy}};$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx}};$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}}.$$

Аналогічно визначаються частинні похідні 3-го, 4-го і т. д. порядків.

$$z'''_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z}\right) = \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial x^2}.$$

Частинна похідна другого або більш високого порядку, що береться по різним змінним, називається мішаною частинною похідною. Такими, наприклад, є z''_{xy}, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, z'''_{xyx}.

Приклад 1.5. Знайти другі частинні похідні для функції $z = x^3y^2 - 3xy^2 - xy + 1$.

Розв'язок:

$$z'_x = 3x^2y^2 - 3y^2 - y, \quad z'_y = 2yx^3 - 6xy - x,$$

$$z''_{xx} = 6x^2y, \quad z''_{yy} = 2x^3 - 6x - 1,$$

$$z''_{xy} = 6x^2y - 6x - 1,$$

$$z''_{yx} = 6x^2y - 6x - 1.$$

Звертає увагу на себе факт, що $z''_{xy} = z''_{yx}$. Виявляється, що даний факт не випадковий. Має місце наступна теорема.

Теорема 1.1. Якщо функція $z = f(x, y)$ визначена разом із своїми похідними $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, причому похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ неперервні в точці $M_0(x_0, y_0)$, тоді в цій точці:

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}.$$

Аналогічна теорема справедлива для будь-яких неперервних мішаних похідних, які відрізняються між собою лише порядком диференціювання.

Повним диференціалом другого порядку називають повний диференціал від диференціала першого порядку за умови, що dx та dy вважаються константами.

$$d(dz) = d^2 z = d\left(z'_x dx + z'_y dy\right) = \left(z'_x dx + z'_y dy\right)'_x dx + \left(z'_x dx + z'_y dy\right)'_y dy =$$
$$= \left(z''_{xx} dx + z''_{yx} dy\right) dx + \left(z''_{yx} dx + z''_y y dy\right) dy = z''_{xx}(dx)^2 + z''_{yx} dy dx + z''_{yx} dx dy + z''_{yy}(dy)^2 =$$
$$= \left| z''_{yx} = z''_{yx} \right| = z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{yx} dy dx + z''_{yy}(dy)^2$$

Аналогічно визначаються повні диференціали третього і т.д. порядків. При цьому кожного разу припускається, що всі частинні похідні, які зустрічаються, є неперервними.