Лекція № 2.

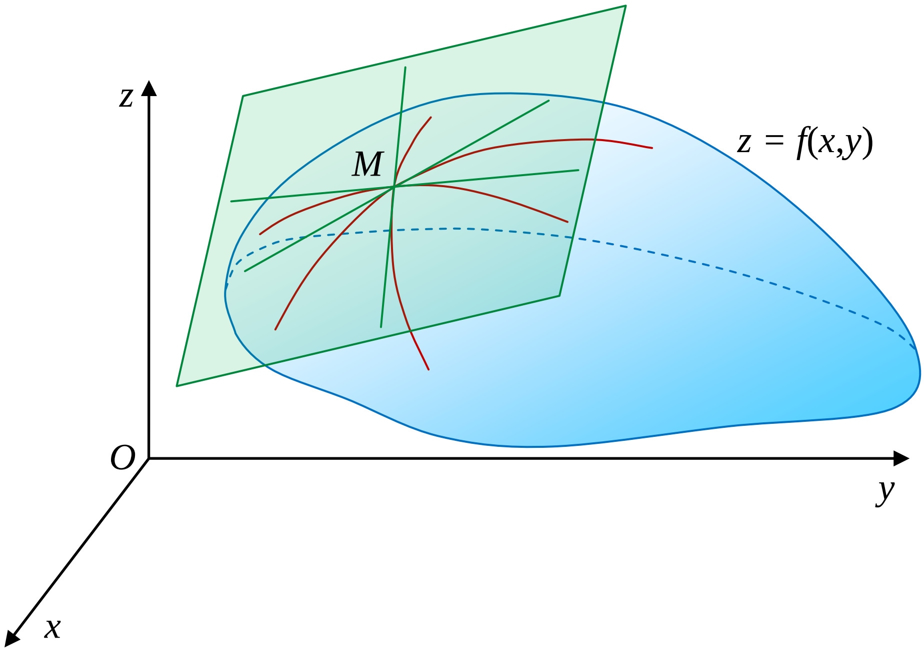
Тема: Деякі застосування частинних похідних.

План лекції:

1. Дотична площина та нормальна пряма до поверхні.
2. Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт.
3. Екстремум функції. Найбільше і найменше значення функції в замкненій області.

1. <u>Дотична площина та нормальна пряма до поверхні.</u>

Означення 1.1. Нехай маємо поверхню, яку задано функцією $z = f(x, y)$. Візьмемо на заданій поверхні точку M і проведемо через неї всі можливі криві, що належать вказаній поверхні. Потім до кривих у точці M проведемо дотичні прямі. Виявляється, що всі ці прямі будуть лежати в одній площині, яку називають дотичною площиною до поверхні $z = f(x, y)$ в точці M.



Перпендикуляр до дотичної площини, поставлений у точці M, називають нормаллю до заданої поверхні в точці M.

Нехай задано поверхню σ рівнянням $F(x, y, z) = 0$. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежить на поверхні σ і $F(x, y, z)$ - диференційовна в точці M_0 і не всі її частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю. Тоді рівняння дотичної площини до поверхні σ в точці M_0 має вигляд:

$$\boxed{F'_x(M_0)\cdot(x - x_0) + F'_y(M_0)\cdot(y - y_0) + F'_z(M_0)\cdot(z - z_0) = 0}$$

Оскільки нормаль проходить через т. M_0 і має напрямний вектор $\bar{n} = \left(F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)\right)$, то канонічне рівняння нормалі має вигляд:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}}$$

Якщо рівняння поверхні σ задано в явній формі: $z = f(x, y)$, то, поклавши $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, дістанемо:

$$F_x'(M_0) = f_x'(x_0, y_0),\ F_y'(M_0) = f_y'(x_0, y_0),\ F_z'(M_0) = -1.$$

Тоді рівняння дотичної площини:

$$\boxed{f_x'(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) = z - z_0},$$

а рівняння нормалі:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}}.$$

Приклад 2.1. Написати рівняння нормалі та дотичної площини до еліпсоїда $2x^2 + y^2 + z^2 = 15$ в точці $M_0(1;2;3)$.

Розв'язок:

$$F(x;y;z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 15,$$

$$F_x' = 4x,\ F_x'(M_0) = 4,$$

$$F_y' = 2y,\ F_y'(M_0) = 4,$$

$$F_z' = 2z,\ F_z'(M_0) = 6.$$

Рівняння дотичної площини:

$$4(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0$$

$$4x + 4y + 6z - 30 = 0 \Rightarrow 2x + 2y + 3z - 15 = 0.$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Приклад 2.2. Написати рівняння нормалі та дотичної площини до параболоїда $z = x^2 + y^2$ в точці $M_0(1;-2;5)$.

Розв'язок:

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

$$f_x' = 2x,\ \ f_y' = 2x,$$

$$f_x'(M_0) = 2,\ \ f_y'(M_0) = -4.$$

Рівняння дотичної площини:

$$2(x-1) - 4(y+2) = z - 5,$$
$$2x - 4y - z - 5 = 0$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}.$$

2. <u>Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт.</u>

<u>Скалярне поле.</u>

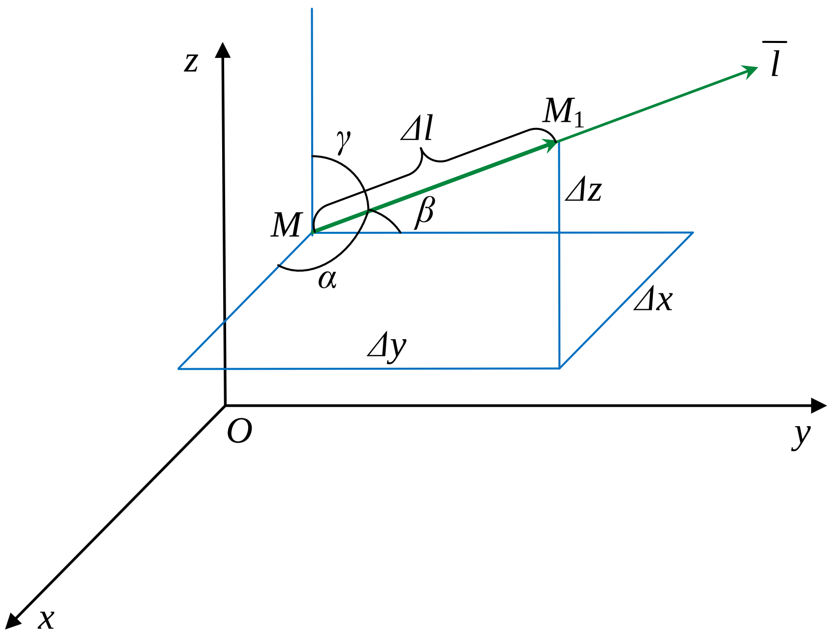
Фізичним полем називають частину простору, в якій відбувається фізичне явище.

Означення 2.1. Фізичне поле називається скалярним, якщо фізичне явище. Яке його утворює. Характеризується функцією $u = u(x, y, z)$, що залежить лише від координат точок простору, в якому це явище відбувається.

Якщо фізичне явище утворило скалярне поле, то кожній точці простору, в якому відбувається це явище, ставиться у відповідність число, що характеризує це явище в даній точці. Наприклад: поле атмосферного тиску, поле температури нерівномірно нагрітого тіла.

Якщо функція, що задає скалярне поле, не залежить від часу, то поле називається стаціонарним, якщо залежить – нестаціонарним.

Похідна за напрямом. Нехай задано скалярне поле $u(x, y, z)$. Візьмемо в ньому точку $M(x, y, z)$ і проведемо з неї вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. На $\vec{l}$ візьмемо точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$на віддалі Δl від точки M $(|MM_1| = \Delta l)$. Обчислимо приріст функції $u(x, y, z)$ при переході від точки M до точки M_1 в напрямку вектора $\vec{l}$: $\Delta_l u = u(M_1) - u(M)$.



Якщо існує $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l u}{\Delta l}$, то її називають похідною функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ по напряму вектора $\vec{l}$ і позначають: $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l u}{\Delta l} = \dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}$.

Нехай функція $u = u(x,\ y,\ z) = u(M)$ диференційовна в точці $M(x, y, z)$. Тоді, за означенням диференційованості функції:

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \Delta z + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y + \varepsilon_3 \cdot \Delta z,$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ нескінченно малі при $\Delta l \to 0$.

Маємо: $\Delta x = \Delta l \cdot \cos\alpha,\ \Delta y = \Delta l \cdot \cos\beta,\ \Delta z = \Delta l \cdot \cos\gamma$, де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ напрямні косинуси вектора $\vec{l}$. Враховуючи це, отримаємо:

$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos\gamma + \varepsilon_1 \cdot \cos\alpha + \varepsilon_2 \cdot \cos\beta + \varepsilon_3 \cdot \cos\gamma.$$

Тоді:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma\right)$$

Оскільки $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 \to 0$ при $\Delta l \to 0$, остаточно матимемо:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma}$$ - формула

для обчислення похідної за напрямом.

Зауваження. Нагадаємо, що напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (x,\ y,\ z)$ знаходяться за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Зауваження. Подібно до того, як частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}$ характеризують швидкість зміни функції в напрямі осей координат, так і похідна $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ характеризує швидкість зміни функції за напрямом $\vec{l}$.

<u>Градієнт.</u>

Нехай задано функцію $u = u(x,\ y,\ z)$ і точка $M(x,\ y,\ z)$.

Означення 2.2. Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u(x, y, z)$ в т. $M(x, y, z)$, називають *градієнтом функції* u в т. M.

Позначають: $\boxed{\overrightarrow{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\vec{k}}$.

Властивості градієнта.

1. Похідна $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ в точці M має найбільше значення, якщо напрям $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта. При цьому: $\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right)_{\max} = \left|\overrightarrow{grad}\, u\right|$. Отже, швидкість зростання функції в довільній точці є максимальною у напрямі градієнта.

2. Похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю.

3. $\overrightarrow{grad}\ (u+v) = \overrightarrow{grad}\, u + \overrightarrow{grad}\ v$.

   $\overrightarrow{grad}\,(Cu) = C\cdot\overrightarrow{grad}\, u$, де $C = const$.

   $\overrightarrow{grad}(u\cdot v) = u\cdot\overrightarrow{grad} v + v\cdot\overrightarrow{grad}\, u$.

   $\overrightarrow{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot\overrightarrow{grad} u - u\cdot\overrightarrow{grad} v}{v^2},\quad v \neq 0.$

Теорема 2.1. Похідна функції $u(x,y,z)$ в точці $M(x,y,z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ дорівнює проекції градієнта функції в цій точці на вектор $\vec{l}$:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = np_{\vec{l}}\, \overrightarrow{gradu} = \frac{\vec{l}\cdot \overrightarrow{gradu}}{\left|\vec{l}\right|}}.$$

Приклад 2.3. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точці $M(1;2;-1)$ за напрямом від точки M до точки $N(2;4;-3)$.

Розв'язок:

Знайдемо координати вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MN} = (1;2;-2)$ та його напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{y}{\left|\vec{l}\right|} == \frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{z}{\left|\vec{l}\right|} == \frac{-2}{3}.$$

Знайдемо частинні похідні функції u і обчислимо їх в точці M .

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = 2x - 2z\Big|_{(1;2;-1)} = 4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M) = 2y\Big|_{(1;2;-1)} = 4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(M) = -2x\Big|_{(1;2;-1)} = -2.$$

Тоді: $$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M) = 4\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{2}{3} + (-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

3. <u>Екстремум функції декількох змінних. Найбільше і найменше значення функції в замкненій області.</u>

Екстремум функції декількох змінних.

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0,y_0)$. Точку $M_0(x_0,y_0)$ називають точкою локального екстремуму для $z = f(x,y)$, якщо для довільної точки M із околу точки M_0 виконується нерівність:

1) $f(M) > f(M_0)$ - M_o точка локального мінімуму*;*
2) $f(M) < f(M_0)$ - M_o точка локального максимуму.

Теорема 2.2. (необхідні умови екстремуму).

Якщо диференційвна функція $z = f(x,y)$ має екстремум в точці $M_0(x_0,y_0)$, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю, тобто $z'_x = 0$, $z'_y = 0$.

Теорема 2.3. (достатні умови існування екстремуму).

Нехай функція $z = f(x,y)$ неперервна в D разом зі своїми частинними похідними першого і другого порядків і точка $M_0(x_0,y_0)$ є критичною.

Знайдемо в точці $M_0(x_0,y_0)$ похідні другого порядку і позначимо:

$$A = (z''_{xx})_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad B = (z''_{xy})_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad C = (z''_{yy})_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

Якщо $AC-B^2>0$, то функція має в точці $P_0(x_0,y_0)$ екстремум: максимум якщо $A<0$ і мінімум якщо $A>0$.

Якщо $AC-B^2<0$, то в точці $P_0(x_0,y_0)$ екстремуму немає.

Якщо $AC-B^2=0$, то висновок про екстремум зробити не можна.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $z=xy-x^2-2y^2+x+10y-8$.

1. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - 2x + 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y + 10$$

2. Прирівняємо частинні похідні до нуля і складемо систему

$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0, \\ x - 4y + 10 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо із першого рівняння $y=2x-1$ і підставимо у друге:

$$\begin{cases} x - 4(2x-1) + 10 = 0, \\ y = 2x - 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 8x + 14 = 0, \\ y = 2x - 1. \end{cases}$$

x = 2, y=3

3. Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$z''_{xx} = -2,\ z''_{xy} = 1,\ z''_{yy} = -4.$

Як бачимо, частинні похідні другого порядку дорівнюють сталим числам в будь-який точці, а значить і в точці $P_0(2;3)$. Тому A=-2, B=1, C=-4.

$AC-B^2=(-2)(-4)-1=7>0$.

Таким чином, в точці P_0 (2;3) функція має максимум

$z(2;3) = 2\cdot 3 - 2^2 - 2\cdot 3^2 + 2 + 10\cdot 3 - 8 = 8.$