Лекція №1.

Тема: Криволінійні інтеграли I роду (по довжині дуги).

План лекції:

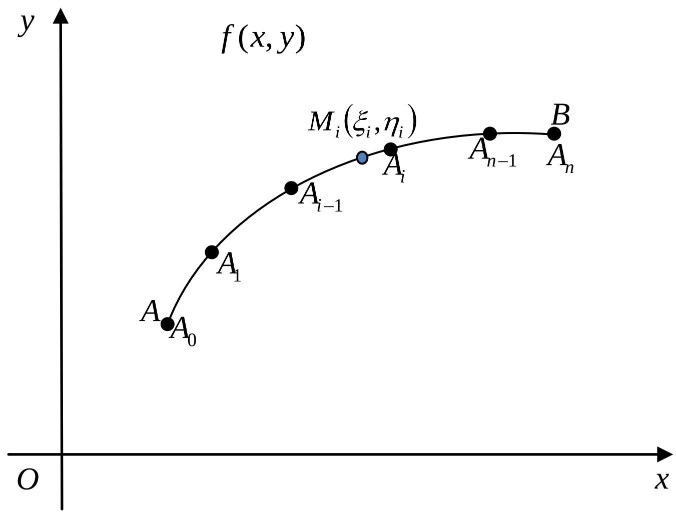
1. Задачі, які приводять до поняття криволінійного інтегралу I- роду. Означення криволінійного інтегралу I- роду.
2. Зведення криволінійного інтеграла I-роду до визначеного інтеграла. Властивості криволінійного інтеграла I- роду.
3. Обчислення криволінійного інтеграла I- роду.
4. Застосування криволінійного інтеграла I-роду.

1. <u>Задачі, які приводять до поняття криволінійного інтегралу I- роду. Означення криволінійного інтегралу I- роду.</u>

Означення. Неперервна крива $x = x(t)$, $y = y(t)$ називається *гладкою* на відрізку $\alpha \le t \le \beta,$ якщо функції $x(t),\ y(t)$ мають на цьому відрізку неперервні похідні $x'(t), y'(t)$, які одночасно не дорівнюють нулю.

Якщо неперервна крива складається із скінченого числа гладких кривих, її називають *кусково-гладкою.*

Розглянемо на площині Oxy криву AB, довжина якої l, і припустимо, що вздовж цієї кривої розподілено масу з лінійною густиною $\rho(x,y)$. Необхідно визначити масу кривої AB. Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_i, ..., A_{n-1}, A_n = B$ на n довільних частин (рис.1).



Позначимо через Δm_i- маса дуги $A_{i-1}A_i$, довжина якої Δl_i. Тоді маса кривої AB $m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$. Обчислимо наближене значення маси дуги $A_{i-1}A_i$. Нехай $M_i(\xi_i, \eta_i)$ довільна точка дуги $A_{i-1}A_i$. Будемо вважати, що густина в кожній точці дуги $A_{i-1}A_i$ така ж, як і в точці M_i. Тоді отримаємо: $\Delta m_i \approx \rho(M_i)\cdot \Delta l_i = \rho(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta l_i$. Знайшовши суму Δm_i $(1 \le i \le n)$, отримаємо наближене значення маси кривої AB: $m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\cdot \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta l_i$. Точним значенням маси кривої AB буде границя даної суми за умови, що $\max \Delta l_i \to 0$. Отже,

$$m = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\cdot \Delta l_i = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta l_i . \qquad (1)$$

До такого типу сум і їх границь приводять і інші задачі. Абстрагуючись від змісту конкретної задачі, розглянемо неперервну функцію $f(x,y)$, визначену в точках кривої AB. Складена для неї сума

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta l_i \qquad (2)$$

називається інтегральню. Позначимо найбільшу з довжин окремих дуг $A_{i-1}A_i$ через $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i$.

Означення. Якщо при $\lambda \to 0$ інтегральна сума (2) має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття кривої AB на частини ні від вибору в них точок M_i, то цю границю називають *криволінійним інтегралом першого роду* (або *криволінійним інтегралом по довжині дуги*) від функції $f(x, y)$ по кривій AB і позначають

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta l_i \,. \qquad (3)$$

У такому разі функція $f(x, y)$ називається *інтегровною* на кривій AB, а сама крива AB – *кривою інтегрування,* A – початковою, B – кінцевою точками інтегрування.

Прирівнюючи (1) і (3) робимо висновок, що $m = \int\limits_{AB} \rho(x, y)\, dl$. Отже, Якщо вздовж неоднорідної матеріальної кривої AB розподілено масу з лінійної густиною $\rho(x, y)$, то маса цієї кривої рівна криволінійному інтегралу І-го роду від функції густини *(фізичний зміст крив олійного інтеграла І-го роду)*.

Теорема (достатня умова інтегровності функції). Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна на кусково-гладкій кривій L, то вона інтегровна по цій кривій.

<u>2.Зведення криволінійного інтеграла І-роду до визначеного інтеграла.</u>

На кривій AB приймемо за параметр довжину дуги l, яка відраховується від точки A до довільної точки кривої AB. При цьому $f(x, y)$, яка визначена на кривій AB, перетвориться у складену функцію параметра l: $f(x, y) = f(x(l), y(l))$, $0 \le l \le L$, де L - довжина кривої AB.

Позначимо l_i - значення параметра l, яке відповідає точці A_i, а τ_i - значення параметра l, яке відповідає точці M_i. Тоді інтегральна сума запишеться у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} f(x(\tau_i), y(\tau_i)) \cdot \Delta l_i \text{, де } \Delta l_i = l_i - l_{i-1},\ l_{i-1} \le \tau_i \le l_i \,. \qquad (4)$$

Отримана сума є інтегральною сумою для визначеного інтеграла від функції $f(x(l), y(l))$ на відрізку $[0, L]$. Отже,

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = \int_{0}^{L} f(x(l), y(l)) dl \,. \qquad (5)$$

Із формули (5) випливає, що всі властивості криволінійного інтеграла І-го роду аналогічні властивостям визначеного інтеграла. Зауважимо лише, що для криволінійного інтегралу І-го роду Δl_i - довжина дуги $(\Delta l_i > 0)$. Тому:

$$\int_{a}^{b} f(x, y) dx = -\int_{b}^{a} f(x, y) dx \text{, але } \int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl \,.$$

<u>3.Обчислення криволінійного інтеграла І- роду.</u>

Розглянемо формули для обчислення криволінійного інтеграла І-го роду у наступних випадках:

а) Нехай крива L задана параметрично рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta \,,$$

причому функції $x(t), y(t)$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t), y'(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$, а функція $f(x, y)$ неперервна на кривій L, тоді

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),\ y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt\,. \tag{6}$$

б) Якщо крива L в декартових координатах задана рівнянням $y = y(x),\ a \le x \le b$, і функція $y(x)$ неперервна разом із своєю похідною $y'(x)$ на відрізку $[a;b]$, то

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x,\ y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx\,. \tag{7}$$

в) Якщо L задається рівнянням $x = x(y),\ (c \le y \le d)$ і функції $x(y),\ x'(y)$ неперервні на відрізку $[c;d]$, то

$$\int_L f(x,y)dl = \int_c^d f(x(y),\ y) \cdot \sqrt{1 + (x'(y))^2}\,dy\,. \tag{8}$$

г) Якщо крива L задана в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$, і функція $\rho(\varphi)$ неперервна разом із своєю похідною $\rho'(\varphi)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$, то

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\ \rho(\varphi)\sin\varphi) \cdot \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi\,. \tag{9}$$

д) Якщо функція $f(x, y, z)$ визначена і неперервна на просторовій кривій L, яку задано рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ \ \alpha \le t \le \beta\,, \\ z = z(t), \end{cases}$$

де функції $x(t),\ y(t),\ z(t)$ та $x'(t),\ y'(t),\ z'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$, то існує криволінійний інтеграл $\int_L f(x, y, z)dl$ і справедливою є формула:

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),\ y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt\,. \tag{10}$$

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$,

де $L -$ відрізок прямої $y = 2x$, що з’єднує точки (0;0) і (1;2).

Розв’язання. Крива інтегрування задана функцією в декартових координатах $y = 2x$, при переході від точки(0;0) до точки (1;2) змінна x набуває значень, що належать відрізку $[0,1]$. Будемо використовувати формулу (7): $\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x,\ y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$.

Знайдемо $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \sqrt{1 + 2^2}\,dx = \sqrt{5}dx$.

Тоді $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{x^2 + (2x)^2 + 4}} = \sqrt{5}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x^2 + 4}} = \sqrt{5}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 4}} = \sqrt{5}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5\left(x^2 + \frac{4}{5}\right)}} =$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{4}{5}}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{4}{5}}\right|\Bigg|_0^1 = \ln\left|1 + \sqrt{1 + \frac{4}{5}}\right| - \ln\left|0 + \sqrt{0 + \frac{4}{5}}\right| = \ln\left|1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right| - \ln\frac{2}{\sqrt{5}} =$$

$$= \ln\left|\frac{\left(\sqrt{5}+3\right)\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot 2}\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right| = \ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}.$$

Приклад 2. Обчисліть криволінійний інтеграл $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right) dl,$ де $L-$дуга гвинтової лінії $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt\ \ (0 \le t \le 2\pi).$

Розв'язання. Для обчислення даного інтеграла використаємо формулу (10) :

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),\,y(t),z(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

Знайдемо $dl = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt = \sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\,dt =$

$$= \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \sqrt{a^2\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,dt.$$

Тоді $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)dl = \int\limits_0^{2\pi}\left((a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(bt)^2\right)\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt =$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2t^2\right)dt = \sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}\left(a^2+b^2t^2\right)dt =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2t+b^2\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(2\pi a^2+\frac{b^2}{3}8\pi^3\right) = \frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(3a^2+4\pi^2b^2\right).$$

<u>4.Застосування криволінійного інтеграла I-роду.</u>

Нехай у площині Oxy задано кусково-гладку криву AB і на цій кривій визначено неперервну функцію $f(x,y),$ тоді:

Площу P *циліндричної поверхні* з напрямною AB, висота якої визначена функцією $z = f(x,y),$ знаходять за формулою

$$P = \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl. \tag{11}$$

Довжину l кривої AB визначають за формулою

$$l = \int\limits_{AB} dl. \tag{12}$$

Нехай вздовж неоднорідної матеріальної дуги L розподілено масу з лінійною густиною $\rho(x,y)$, тоді:

Маса дуги L обчислюється за формулою

$$m = \int\limits_L \rho(x,y)\ dl. \tag{13}$$

Координати $x_c,\ y_c$ *центра маси дуги* L знаходять за формулою

$$x_c = \frac{\int\limits_L x\,\rho(x,y)\,dl}{\int\limits_L \rho(x,y)\,dl} = \frac{M_y}{m};\quad y_c = \frac{\int\limits_l y\,\rho(x,y)\,dl}{\int\limits_L \rho(x,y)\,dl} = \frac{M_x}{m}, \tag{14}$$

де $M_x,\ M_y-$ статичні моменти кривої L відносно осей Ox і Oy.

Моменти інерції дуги L відносно осей Ox, Oy та початку координат відповідно дорівнюють

$$J_x = \int\limits_L y^2\rho(x,y)\,dl;\quad J_y = \int\limits_L x^2\rho(x,y)\,dl;\ J_0 = \int\limits_L\left(x^2+y^2\right)\rho(x,y)\,dl. \tag{15}$$

Приклад 3. Знайти масу дуги кривої $y = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$ від точки $O(0;0)$ до точки $A\left(4;\ \frac{16}{3}\right),$ якщо лінійна густина в точці M кривої дорівнює довжині частини дуги OM.

Розв'язання.

Крива задана в декартовій системі координат:

$$y = \frac{2x\sqrt{x}}{3} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},\ 0 \le x \le 4 .$$

Знайдемо довжину частини дуги OM . Спочатку визначимо похідну

$$y' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} .$$

Тоді

$$\rho(M) = l_{OM} = \int_0^x \sqrt{1+\left(\sqrt{\mathrm{x}}\right)^2}\, d\,\mathrm{x} = \int_0^x (1+\mathrm{x})^{1/2}\, d\,\mathrm{x} = \left.\frac{(1+\mathrm{x})^{3/2}}{3/2}\right|_0^x = \frac{2}{3}\sqrt[2]{(1+x)^3} - \frac{2}{3} .$$

$$m = \int_L \rho(x,y)dl = \frac{2}{3}\int_0^4 \left((1+x)^{3/2} - 1\right)\cdot\sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3}\int_0^4 \left((1+x)^2 - (1+x)^{1/2}\right)dx =$$

$$= \left.\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{(1+x)^3}{3} - \frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\right)\right|_0^4 = \frac{2}{9}5^3 - \frac{4}{9}5^{3/2} - \left(\frac{2}{9} - \frac{4}{9}\right) = \frac{252 - 20\sqrt{5}}{9} .$$