Лекція №10

Тема: Поняття числового ряду.

План лекції:

1. Числовий ряд та його сума.
2. Геометрична прогресія.
3. Основні властивості числових рядів.
4. Необхідна умова збіжності числових рядів.
5. Гармонічний ряд.

1. Числовий ряд та його сума.

Нехай задано послідовність дійсних чисел $\{u_n\} = \{u_1, u_2, u_3, ...u_n, ...\}$.

Означення. Числовим рядом називають вираз $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1),

а $u_1, u_2, u_3, ...u_n, ...$ - членами ряду.

Ряд вважається заданим, якщо існує правило, за яким кожному натуральному числу n можна поставити у відповідність член ряду u_n. Сума (1) не має ніякого числа, тому що нескінченне число додавань виконати не можливо.

Розглянемо послідовність скінченних сум $S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2, ..., S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Суми $S_1, S_2, ..., S_n$ називають частинними сумами ряду. Таким чином кожному числовому ряду можна поставити у відповідність послідовність $\{S_n\}$ його частинних сум. Якщо послідовність $\{S_n\}$ збіжна і $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то число S називають сумою ряду (1), а ряд (1) називають збіжним. Якщо $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, то кажуть, що розбіжний ряд має нескінченну суму. Якщо ряд збіжний і має суму S, то це записують так: $S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Наприклад:

а) $1+1+1+...+1+... = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n,\ S_n = n,\ \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$ – ряд розбіжний.

б) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$,

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ – ряд збіжний.

S_n є наближеним значенням для S суми всього ряду. Покладемо $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ...$, якщо $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Величину r_n називають *залишком ряду*.

2. Геометрична прогресія.

Ряд виду $u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + ... + u_1 q^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_1 q^{n-1}$ називають геометричною прогресією, u_1 – перший член геометричної прогресії, q – знаменник геометричної прогресії.

Розглянемо S_n даного ряду. Якщо $|q| \neq 1$, то $S_n = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + ... + u_1 q^{n-1}$ (2).

Помножимо S_n на q:

$$qS_n = u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 + ... + u_1 q^{n-1} + u_1 q^n \quad (3)$$

і складемо різницю (2)–(3):

$$S_n - qS_n = u_1 - u_1 q^n \Rightarrow S_n(1-q) = u_1(1-q^n) \Rightarrow S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Якщо $|q| = 1$, то $S_n = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots + u_1 q^{n-1} = nu_1$.

Отже $S_n = \begin{cases} \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}, & |q| \neq 1, \\ nu_{1,} & |q| = 1. \end{cases}$

Якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{u_1}{1-q} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_1 q^{n-1}$ – збіжний.

Якщо $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_1 q^{n-1}$ – розбіжний.

Якщо $q = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} nu_1 = \infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_1 q^{n-1}$ – розбіжний.

Якщо $q = -1$, то матимемо ряд $u_1 - u_1 + u_1 - u_1 + \ldots$, для якого $S_n = u_1$ при непарному n і $S_n = 0$ при парному n, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, а це означає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_1 q^{n-1}$ розбіжний. Отже, геометрична прогресія є рядом збіжним при $|q| < 1$ і рядом розбіжним при $|q| \geq 1$.

3. Основні властивості числових рядів.

1. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний і має суму S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ також збіжний і його сума рівна $c \cdot S$.

2. На збіжність числового ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.

3. Збіжні ряди можна почленно додавати та віднімати, тобто якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжні і мають відповідні суми S і σ, то збіжним також є ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ і його сума рівна $S \pm \sigma$.

Доведемо дану властивість.

Нехай маємо збіжні ряди

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{4}$$

і $$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad (5),$$

суми яких відповідно дорівнюють S і σ. Доведемо, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots \tag{6}$$

є збіжним і має суму $S + \sigma$.

Для цього знайдемо частинну суму ряду (6), позначимо її δ_n і обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n$.

$$\delta_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = S_n + \sigma_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} (S_n + \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S + \sigma.$$

Властивість доведено.

4. Ряд збіжний (розбіжний) тоді і лише тоді, коли збіжний (розбіжний) його залишок.

4. Необхідна умова збіжності числових рядів.

При дослідженні рядів одним із основних питань є питання про те, збіжним чи розбіжним є даний ряд. Розглянемо необхідну умову збіжності числового ряду, тобто умову при невиконанні якої ряд не може бути збіжним.

Теорема. Якщо ряд збіжний. То його n–й член прямує до нуля при необмеженому прямуванні n ($\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$).

Доведення.

Нехай ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, тобто має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{7}$$

де S сума ряду, тобто деяке фіксоване число.

Справедливою також буде рівність

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S, \tag{8}$$

тому що при $n \to \infty$, $(n-1) \to \infty$ також.

Віднімемо від рівності (7) рівність (8):

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0 \Rightarrow S_n - S_{n-1} = u_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Теорему доведено.

Наслідок. Якщо n – й член ряду не прямує до нуля при $n \to \infty$, то ряд розбіжний.

Зауваження. Слід відмітити, що дана умова є лише необхідною, тобто із того, що n-й член ряду прямує до нуля, ще не слідує, що ряд буде збіжним.

Прикладом може слугувати *гармонічний ряд*:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

Який є розбіжним, хоча $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Покажемо, що це насправді так. Розпишемо докладніше ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \ldots. \tag{9}$$

Запишемо допоміжний ряд, який утворимо так:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \ldots. \tag{10}$$

Позначимо через S_n^1 суму n перших членів ряду (9), а S_n^2 суму n перших членів ряду (10). Кожен член ряду (9) більший або рівний відповідного члена ряду (10), тому маємо:

$$S_n^1 \ge S_n^2.$$

Обчислимо частинні суми ряду (10) для $n = 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$.

$$S_{2^1} = 1 + \frac{1}{2},$$

$$S_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_{2^3} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_{2^4} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$$

Очевидно, що $S_{2^k} = 1 + k \cdot \dfrac{1}{2}$. Тобто $S_n^2 = S_{2^n}$. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + n \cdot \dfrac{1}{2}\right) = \infty$. Тому що $S_n^1 \geq S_n^2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n^1 = \infty$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ є розбіжним.