Лекція №11

Тема: Достатні ознаки збіжності знакододатних числових рядів.

План лекції:

1. Ознаки порівнянь.
2. Ознака Даламбера.
3. Радикальна ознака Коші.
4. Інтегральна ознака Коші.

1. Ознаки порівнянь.

Теорема 1. Нехай маємо два ряда з додатними членами:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n , \qquad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad (2)$$

і для всіх n виконується нерівність $u_n \le v_n$. Тоді:

1) якщо ряд (2) збіжний, то збіжний і ряд (1);
2) якщо ряд (1) розбіжний, то розбіжний і ряд (2).

Доведення.

Позначимо через S_n і σ_n частинні суми рядів (1) і (2). За умовою теореми

$$u_n \le v_n \Rightarrow S_n \le \sigma_n .$$

1) Ряд (2) збіжний, тому $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \Rightarrow \left.\begin{matrix} \sigma_n \le \sigma \\ S_n \le \sigma_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_n \le \sigma$, тобто $\{S_n\}$ є обмеженою, а це означає, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, а отже ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний.

2) Ряд (1) розбіжний. Отже $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ ($S_n \le \sigma_n$), тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n \ge \infty$. Тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ також є розбіжним.

Зауваження 1. Ознаки порівняння можна застосувати і тоді коли $u_n \le v_n$ виконується не для всіх членів ряду, а починаючи з деякого номера N (властивість 2).

Зауваження 2. При дослідженні рядів за допомогою ознак порівняння часто використовують для порівняння геометричну прогресію та узагальнений гармонічний ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_1 q^{n-1} \begin{cases} |q| < 1 - \textit{ряд збіжний}; \\ |q| \ge 1 - \textit{ряд розбіжний}. \end{cases}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \alpha > 1 - \textit{ряд збіжний}; \\ \alpha \le 1 - \textit{ряд розбіжний}. \end{cases}$

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Розв'язок.

Оскільки $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$, $n = 1,2,\ldots$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1}$ є розбіжний, як гармонічний ряд, тому і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ також розбіжний.

Теорема 2. (Гранична ознака порівнянь). Якщо задано два ряди з додатними членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n , \qquad (3)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \,, \tag{4}$$

Причому існує скінченна, відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = a \ (a \neq 0, a \neq \infty)$, то ряди (3) і (4) одночасно або збіжні, або розбіжні.

Доведення.

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = a, \neq 0$, тоді для будь якого $\varepsilon > 0 \ (\varepsilon < a)$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ буде виконуватись рівність $\left| \dfrac{u_n}{v_n} - a \right| < \varepsilon$ або

$$(a - \varepsilon) v_n < u_n < (a + \varepsilon) v_n \,. \tag{5}$$

Тоді, якщо ряд (3) збіжний, то за теоремою 1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a - \varepsilon) v_n$ – збіжний, а за властивістю 1 збіжним є і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Якщо ряд (3) розбіжний, то за теоремою 1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a + \varepsilon) v_n$ – розбіжний, а за властивістю 1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ також розбіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg \dfrac{\pi}{3n}$.

Розв'язок. n-й член заданого ряду $u_n = tg \dfrac{\pi}{3n}$. Порівняємо заданий ряд із гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{tg \dfrac{\pi}{3n}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{3n} \cdot n = \frac{\pi}{3}, \neq 0, \neq \infty \text{, отже } \sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{\pi}{3n} \text{ розбіжний.}$$

<u>2.Ознака Даламбера.</u>

Теорема 3. Якщо для ряду із додатними членами $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, якщо $l < 1$;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний, якщо $l > 1$;

3) якщо $l = 1$, то питання про поведінку ряду залишається відкритим.

Доведення.

1) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$. Тоді за означенням границі для будь якого $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність: $\left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon$ або

$$l-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon. \qquad (6)$$

Оскільки $l<1$, то ε можна вибрати так, щоб $q=l+\varepsilon<1$. Розглянемо праву сторону нерівності (6) $\frac{u_{n+1}}{u_n}<q$ або $u_{n+1}<u_n\cdot q,\ n>N$. Надамо n значень $N+1,\ N+2,\ N+3$ і т.д.

$$u_{N+2}<u_{N+1}\cdot q$$
$$u_{N+3}<u_{N+2}\cdot q<u_{N+1}\cdot q^2$$
$$u_{N+4}<u_{N+3}\cdot q<u_{N+1}\cdot q^3$$
$$-----------$$

Тоді члени ряду

$$u_{N+2}+u_{N+3}+u_{N+4}+\ldots \qquad (7)$$

Менші відповідних членів ряду

$$u_{N+1}\cdot q+u_{N+1}\cdot q^2+u_{N+1}\cdot q^3+\ldots\ . \qquad (8)$$

Ряд (8) є збіжною геометричною прогресією ($q<1$). Ряд (7) за ознакою порівнянь також є збіжним.

2) Нехай $l>1$. Тоді із нерівності $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l>1$ слідує, що починаючи з деякого номера N, тобто при $n\geq N$ буде мати місце нерівність $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ або $u_{n+1}>u_n$. А це означає, що члени ряду зростають, починаючи з деякого номера $N+1$ і тому загальний член ряду не прямує до нуля (не виконується необхідна умова збіжності ряду). Отже ряд розбіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Розв'язок.

Застосуємо ознаку Даламбера. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$.

$$u_n=\frac{1}{n!},\ u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!},\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0\Rightarrow l=0<1, \quad \text{отже}$$

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ за ознакою Даламбера збіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Застосуємо ознаку Даламбера. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$.

$$u_n=\frac{n^n}{n!},\ u_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!},\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n\cdot(n+1)\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\Rightarrow l=e>1,$$ отже ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ за ознакою Даламбера розбіжний.

Зауваження 3. Ряд буде розбіжним і у тому випадку, коли $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$.

Зауваження 4. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ або не існує, то ознака Даламбера не дає можливості встановити збіжність чи розбіжність ряду.

Зауваження 5. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, проте для всіх номерів n, починаючи з деякого номера $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, то ряд розбіжний. Це слідує із того, що якщо $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, то $u_{n+1}>u_n$ і загальний член ряду не прямує до нуля, а отже не виконується необхідна умова збіжності.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n+2!}}{\frac{n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1.$$

Проте $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1+\frac{1}{n^2+2n}>1$, отже ряд розбіжний.

3. Радикальна ознака Коші.

Теорема 3. Якщо для ряду із додатними членами $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ величина $\sqrt[n]{u_n}$ має скінченну границю l при $n\to\infty$. тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збіжний, якщо $l<1$;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ розбіжний, якщо $l>1$;

3) якщо $l=1$, то питання про поведінку ряду залишається відкритим.

Доведення.

1) Нехай $l<1$. Розглянемо число q, яке задовольняє умові $l<q<1$. Починаючи з деякого номера $n=N$ буде мати місце співвідношення $\left|\sqrt[n]{u_n}-l\right|<q-l\Rightarrow\sqrt[n]{u_n}<q$ або $u_n<q^n$ для всіх $n\geq N$. Розглянемо тепер два ряда:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots \tag{9}$$

$$q^N+q^{N+!}+q^{N+2}+\ldots \quad . \tag{10}$$

Ряд (10) збіжний, тому що це геометрична прогресія з $q<1$. Члени ряду (9) починаючи з u_n менші відповідних членів ряду (10), тобто ряд (9) є збіжний за ознакою порівнянь (теорема 1) та властивістю 2.

2) Нехай $l>1$. Тоді починаючи з деякого номера $n=N$ будемо мати $\sqrt[n]{u_n}>1$ або $u_n>1$. Але, якщо всі члени ряду, починаючи з u_N, більші одиниці, то ряд розбіжний, тому що його загальний член не прямує до нуля.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

$u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow l = \frac{1}{2} < 1$, отже ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ за радикальною ознакою Коші збіжний.

4. Інтегральна ознака Коші.

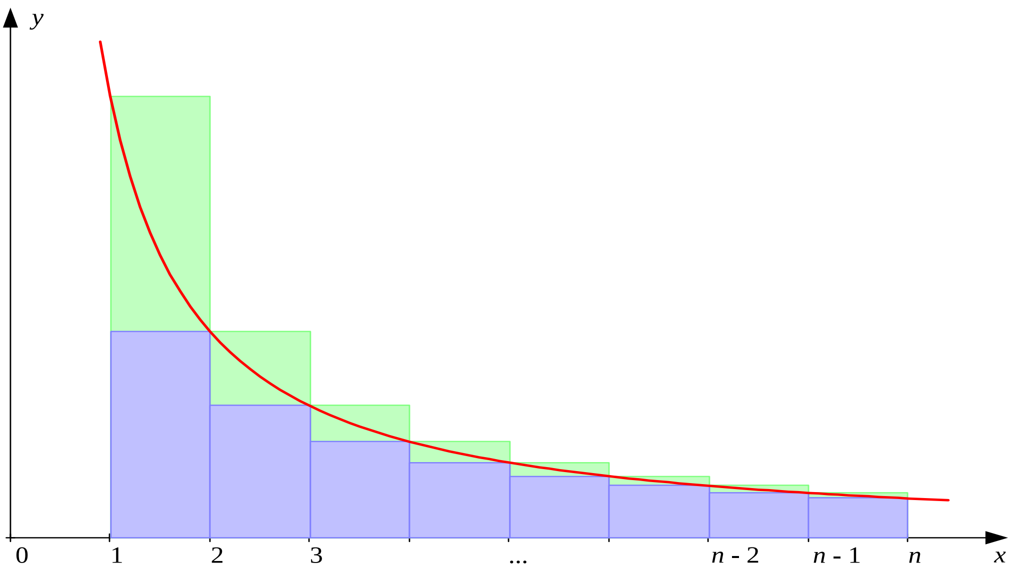
Теорема 4. Нехай члени ряду $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ додатні і не зростають, тобто $u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge \ldots \ge u_n \ge \ldots$ і нехай $f(x)$ – така неперервна не зростаюча функція, що $f(1) = u_1,\ f(2) = u_2, \ldots,\ f(n) = u_n, \ldots,\ x \in [1;+\infty)$. Тоді справедливі наступні твердження:

1) якщо $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ збіжний, то збіжним буде і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$;

2) якщо $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ розбіжний, то розбіжним буде і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Доведення.

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену кривою $y = f(x)$ і прямими $x = 1, x = n$, $y = 0$.



$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots,\quad S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n).$$

Площа такої криволінійної трапеції рівна $I_n = \int\limits_1^n f(x)dx$. Впишемо у цю трапецію і опишемо навколо неї ступінчаті фігури, утворені з прямокутників, основи яких є проміжки $[1;2], [2;3] \ldots, [n-1;n]$, а висоти $f(1) = u_1, f(2) = u_2, \ldots, f(x) = u_n$. Тоді

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) < I_n < f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$$

$S(n) - f(1) < I_n < S_n - f(n)$, де S_n - частинна сума числового ряду.

$$S_n < I_n + f(1)$$
$$S_n > I_n + f(n)$$

1) Нехай $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ збіжний, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^n f(x)dx = I \Rightarrow I_n < I$. $S_n < I + f(1)$,

тобто послідовність $\{S_n\}$ обмежена, а це означає, що $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний.

3) Нехай $\int_1^{\infty} f(x)dx$ розбіжний, тобто $\lim_{n\to\infty} I_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} f(x)dx = \infty$.

Тоді $S_n > \infty + f(n) > \infty$, тобто послідовність $\{S_n\}$ необмежена, отже $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3}$.

Застосуємо інтегральну ознаку. Функція $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$ монотонно спадна при $x \in [1;\infty)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3} = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots, \qquad \int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2+3}dx = \ln\left(x^2+3\right)\Big|_1^{\infty} = \infty .$$

Отже, за інтегральною ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+3}$ розбіжний.