Лекція №12.

Тема: Знакозмінні ряди.

1. Ряди, в яких знаки членів строго чергуються. Ознака Лейбніца.
2. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжність.

1. Розглянемо ряд, знаки членів якого строго чергуються, тобто ряд, довільні два сусідні члени якого мають різні знаки:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots,$$

де $u_n > 0$, $n = 1,2,\ldots$.

Такі ряди досліджують на збіжність за допомогою наступної достатньої ознаки (ознака Лейбніца):

Теорема 1.

Якщо знаки членів ряду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots \ (u_n > 0)$$

строго чергуються і ці члени такі, що

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_{n-1} > u_n > u_{n+1} > \ldots$,
2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

то ряд збіжний, його сума додатна і не перевищує першого члена ряду.

Доведення.

Розглянемо частинну суму ряду S_n при $n = 2m$.

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m}.$$

Згрупуємо доданки попарно

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Із умови 1) слідує, що $u_1 - u_2 > 0$, $u_3 - u_4 > 0$, … , $u_{2m-1} - u_{2m} > 0$, тобто кожна дужка є додатним числом. Звідси $S_{2m} > 0$ і із зростанням m, S_{2m} також зростає. Перегрупуємо доданки в S_{2m} по-іншому:

$$S_{2m} = u_1 - (\underbrace{u_2 - u_3}_{\vee \atop 0}) - (\underbrace{u_4 - u_5}_{\vee \atop 0}) - \ldots - (\underbrace{u_{2m-2} - u_{2m-1}}_{\vee \atop 0}) - \underbrace{u_{2m}}_{\vee \atop 0}.$$

Звідси випливає, що $S_{2m} < u_1$, тобто $\{S_{2m}\}$ є обмеженою зверху послідовністю. $\{S_{2m}\}$ монотонно зростає, обмежена зверху, тому має границю: $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, до того ж $0 < S < u_1$.

Проте збіжність ряду ще не доведена. Покажемо, що частинні суми з непарними номерами прямують до тієї самої границі S.

Нехай $n = 2m+1$. Можемо записати, що $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. За умовою 2) теореми $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, тобто $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} + \lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$.

Тим самим ми довели, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, як при парному, так і непарному n. Отже ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ є збіжним.

Зауваження 1. Теорема Лейбніца залишається справедливою, якщо нерівності 1) виконуються починаючи з деякого N.

Наслідок. Абсолютна похибка при заміні збіжного ряду, знаки членів якого строго чергуються, його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто

$$|S - S_n| \le u_{n+1}.$$

Приклад. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(4n)^3}$ збіжний і знайти його суму з точністю до $0{,}001$.

Розв’язання.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(4n)^3}=\frac{1}{4^3}-\frac{1}{8^3}+\frac{1}{12^3}-\frac{1}{16^3}+...$ – знаки членів ряду строго чергуються;

2) $\frac{1}{4^3}>\frac{1}{8^3}>\frac{1}{12^3}>\frac{1}{16^3}>...$ – модуля членів спадають;

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(4n)^3}=0$.

Отже, за теоремою Лейбніца ряд збіжний і має суму S.

$$S=\frac{1}{4^3}-\frac{1}{8^3}+\frac{1}{12^3}-\frac{1}{16^3}+....$$

Знайдемо перший член ряду, модуль якого менший ніж задана точність обчислення суми

$$\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}\approx 0{,}0156>0{,}001,\ \frac{1}{8^3}=\frac{1}{512}\approx 0{,}002>0{,}001,\ \frac{1}{12^3}=\frac{1}{1728}\approx 0{,}00058<0{,}001.$$

За наслідком із теореми Лейбніца $S\approx\frac{1}{64}-\frac{1}{512}\approx 0{,}0156-0{,}002\approx 0{,}014.$

2. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжність.

Означення. Знакозмінним називають ряд, якщо серед його членів є як додатні, так і від'ємні.

Розглянуті нами вище ряди, в яких знаки членів строго чергуються, є частинним випадком знакозмінних рядів.

Розглянемо деякі властивості знакозмінних рядів.

При цьому, на відміну від попереднього пункту, будемо вважати, що u_1, u_2, …, u_n можуть бути як додатними, так і від'ємними числами.

Теорема 2. (достатня ознака збіжності знакозмінного ряду).

Якщо знакозмінний ряд

$$u_1+u_2+...+u_n+... \tag{1}$$

такий, що ряд, складений із модулів його членів

$$|u_1|+|u_2|+...+|u_n|+... \tag{2}$$

збіжний, то і даний знакозмінний ряд збіжний.

Доведення.

Нехай S_n і σ_n – n-ні частинні суми рядів (1) і (2) відповідно. Нехай S_n' – сума додатних, а S_n'' – сума абсолютних величин від'ємних членів із S_n. Тоді $S_n=S_n'-S_n''$, $\sigma_n=S_n'+S_n''$. За умовою теореми σ_n має границю σ.

S_n' і S_n'' – додатні зростаючі величини, менші σ.

Отже, S_n' і S_n'' – мають границі.

Із того, що $S_n=S_n'-S_n''$, випливає, що S_n має границю, яка дорівнює різниці границь S_n' і S_n'', значить знакозмінний ряд збігається.

Відмітимо, що доведена нами ознака збіжності знакозмінного ряду є достатньою ознакою, проте не є необхідною. Існують такі знакозмінні ряди, які самі є збіжними, проте ряди, складені із абсолютних величин їх членів є розбіжними. У зв'язку із цим введемо поняття абсолютної і умовної збіжності знакозмінних рядів.

Означення. Знакозмінний ряд $u_1+u_2+...+u_n+...$ називається абсолютно збіжним, якщо є збіжним ряд, який складений із абсолютних величин його членів $|u_1|+|u_2|+...+|u_n|+...$.

Означення. Якщо знакозмінний ряд $u_1+u_2+...+u_n+...$ збіжний, а ряд, складений із абсолютних величин його членів, є розбіжним, то такий знакозмінний ряд називають умовно або неабсолютно збіжним.

Сформулюємо дві теореми, які приймемо без доведення.

Теорема 3. Якщо ряд збіжний абсолютно, то він залишається абсолютно збіжним при будь-які перестановці його членів. При цьому сума ряду не залежить від порядку слідування його членів.

Теорема 4. Якщо ряд збіжний умовно, то, яке б ми не задали число A, можна так переставити члени ряду, що його сума буде рівна числу A. Більш того, можна так переставити члени ряду, що ряд, отриманий після такої перестановки, буде розбіжним.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$.

Розв'язання. Складемо ряд із абсолютних величин членів цього ряду:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Це гармонічний ряд, він розбіжний.

Перевіримо виконання умов теореми Лейбніца:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\dots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Умови теореми Лейбніца виконуються, отже ряд збіжний.

Таким чином, даний ряд є умовно збіжним.