Лекція №2.

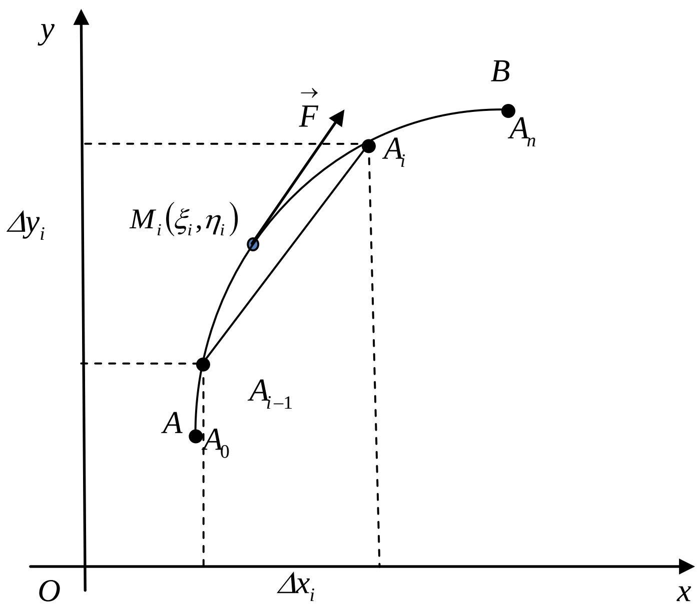
Тема: Криволінійні інтеграли II роду (по координатах)

План лекції:

1.Означення криволінійного інтеграла II роду. Задача про роботу.
2.Властивості криволінійного інтеграла II роду.
3.Обчислення криволінійного інтеграла II роду.
4. Застосування криволінійного інтеграла II роду.
5. Зв'язок між криволінійними інтегралами I та II роду.

1.Означення криволінійного інтеграла II роду. Задача про роботу.

Розглянемо задачу про роботу змінної сили. Нехай матеріальна точка під дією сили $\vec{F}=\left(P(x,y),Q(x,y)\right)$ рухається вздовж кусково-гладкої кривої AB. Необхідно визначити роботу W сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із A в B.



Для розв’язання даної задачі розіб’ємо криву AB на n частин точками $A=A_0,A_i,\ldots,A_{n-1},A_n=B$. Силу $\vec{F}$ на дузі $A_{i-1}A_i$ замінимо її значенням в точці $M_i(\xi_i,\eta_i)$ дуги $A_{i-1}A_i$, а рух по дузі $A_{i-1}A_i$ – рухом по вектору $\overline{A_{i-1}A_i}(\Delta x_i,\Delta y_i)$. Тоді наближене значення роботи W_i на $A_{i-1}A_i$ можна знайти як скалярний добуток векторів сили та переміщення: $W_i\approx\vec{F}\cdot\vec{S}=\overline{F(M_i)}\cdot\overline{A_{i-1}A_i}=\left(P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i\right)$. Наближене значення роботи W на AB у такому випадку буде рівне: $W\approx\sum_{i=1}^{n}\overline{F(M_i)}\cdot\overline{A_{i-1}A_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i\right)$.

За точне значення роботи приймемо граничне значення наближеного при $\max\Delta x_i\to 0$ i $\max\Delta y_i\to 0$:

$$W=\lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\left(P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i\right). \qquad (1)$$

Знаходження границі такого виду сум зустрічаються і в інших задачах. Абстрагуючись від змісту конкретної задачі, розглянемо вектор $\vec{a}=\left(P(x,y),Q(x,y)\right)$, $(x,y)\in D$. Нехай функції $P(x,y),Q(x,y)$ неперервні в D і крива AB належить області D. Розіб’ємо криву AB на n частин і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n}\left(P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i \vec{+} Q(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta y_i\right),$$

яку назвемо інтегральною сумою.

Означення. Криволінійним інтегралом II роду по координатах від функцій $P(x,y), Q(x,y)$ по кривій AB ($\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$) називається границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n}\left(P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i \vec{+} Q(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta y_i\right)$ при $\max \Delta x_i \to 0$ $і$ $\max \Delta y_i \to 0$, якщо вона не залежить ні від способу розбиття кривої AB на частини, ні від вибору проміжних точок M_i :

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n}\left(P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta y_i\right). \quad (2)$$

Криволінійний інтеграл II роду також називають інтегралом від вектора по кривій і позначають $\int_{AB} \vec{a}\cdot d\vec{r},\ d\vec{r} = (dx, dy)$.

Із формул (1) та (2) випливає *фізичний зміст криволінійного інтеграла II роду*:

$$W = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}\,.$$

Криволінійний інтеграл II роду вздовж деякої кривої дорівнює роботі змінної сили $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ при переміщенні матеріальної точки вздовж даної кривої.

2.Властивості криволінійного інтеграла II роду.

Криволінійний інтеграл II роду має властивості аналогічні властивостям визначеного інтеграла. Наведемо лише найважливіші із них:

1. $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.
2. $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{CB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

3.Обчислення криволінійного інтеграла II роду.

Зведемо криволінійний інтеграл II роду до визначеного інтеграла.

Нехай AB задана параметрично $x = x(t), y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta,\ x(t), y(t)$ на $[\alpha, \beta]$ неперервні разом із $x'(t), y'(t)$, причому α відповідає точці A, а β точці B. Припустимо, що $P(x,y)$ неперервна на AB, тоді $\int_{AB} P(x,y)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n}\left(P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i\right)$.

За формулою Лагранжа існує така точка $\tau_i \in [t_{i-1}; t_i]$, що

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i)\cdot(t_i - t_{i-1}) = x'(\tau_i)\cdot \Delta t_i\,.$$

Виберемо точку $M_i(\xi_i,\eta_i)$ так, щоб $\xi_i = x(\tau_i)$, $\eta_i = y(\tau_i)$, тоді

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} P(x(\tau_i), y(\tau_i))\cdot x'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Вираз у правій частині рівності є звичайною інтегральною сумою для функції $P(x(\tau_i), y(\tau_i))\cdot x'(\tau_i)$ на проміжку $[\alpha, \beta]$, тому

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))\cdot x'(t)\, dt.$$

Аналогічно можна довести, що

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)\,dt.$$

Остаточно маємо формулу:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t),y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)\big)\,dt.$$

Якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $a \le x \le b$, де функція $y(x)$ та її похідна $y'(x)$ неперервні на проміжку $[a;b]$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{a}^{b} \big(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\cdot y'(x)\big)\,dx.$$

Якщо крива AB задана рівнянням $x = x(y)$, $c \le y \le d$, де функція $x(y)$ та її похідна $x'(y)$ неперервні на проміжку $[c;d]$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{c}^{d} \big(P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)\big)\,dy.$$

Нехай функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ визначені і неперервні на кривій AB, яку задано рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, де функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ та їхні похідні $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ неперервні на проміжку $[\alpha;\beta]$. Тоді

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big)dt.$$

Часто доводиться розглядати криволінійні інтеграли по замкненому контуру, тобто контуру інтегрування, в якому початкова і кінцеві точки збігаються (мова йде про замкнені контури без точок само перетину). Для замкненого контура існує лише два напрями обходу: проти годинникової стрілки (додатна орієнтація контура) та за годинниковою стрілкою (від'ємна орієнтація контура). Іншими словами, контур вважається додатно орієнтованим, якщо при його обході область, обмежена даним контуром, залишається зліва. Криволінійний інтеграл по додатно орієнтованому контуру L позначають так:

$$\oint_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Приклад 1. Обчисліть криволінійний інтеграл $\int_{L} (x^2 - y^2)dx + xy\,dy$,

де $L-$ відрізок прямої від $A(1;1)$ до $B(3;4)$.

Розв'язання.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки, має вигляд:

$$AB: \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{4-1} \Leftrightarrow 3(x-1) = 2(y-1) \Leftrightarrow 3x-3 = 2y-2 \Leftrightarrow y = \frac{3x-1}{2}.$$

Тоді $dy = \frac{3}{2}dx$, $1 \le x \le 3$. Звідки маємо:

$$\int_{L} (x^2 - y^2)dx + xy\,dy = \int_{1}^{3} \left(x^2 - \left(\frac{3x-1}{2}\right)^2\right)dx + \int_{1}^{3} x\cdot\frac{3x-1}{2}\cdot\frac{3}{2}dx =$$

$$= \int_{1}^{3} \left(\frac{4x^2 - 9x^2 + 6x - 1}{4} + \frac{9x^2 - 3x}{4}\right)dx = \frac{1}{4}\int_{1}^{3} (4x^2 + 3x - 1)dx =$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x\right)\Bigg|_1^3=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\cdot 3^3+\frac{3}{2}\cdot 3^2-3-\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-1\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(36+\frac{27}{2}-3-\frac{4}{3}-\frac{3}{2}+1\right)=\frac{1}{4}\left(34+12-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{134}{3}=\frac{134}{12}=\frac{67}{6}.$$

Приклад 2. Обчисліть криволінійний інтеграл

$$\int_L \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}},$$

де $L-$ дуга кривої $x=R\cos^3 t$, $y=R\sin^3 t$, що проходить від точки $A(R;0)$ до точки $B(0;R)$.

Розв'язання.

Відповідно до рівнянь дуги $dx=-3R\cos^2 t\sin t\,dt$, $dy=3R\sin^2 t\cos t\,dt$. При русі від точки A до точки B величина x змінюється від R до 0, а $y-$ від 0 до R, тому параметр t змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Отже,

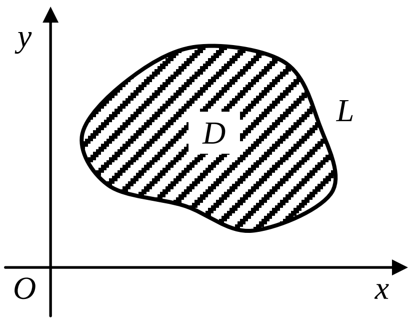
$$\int_l \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2\cos^4 t\cdot 3R\sin^2 t\cos t+R^2\sin^6 t\cdot 3R\cos^2 t\sin t}{R^{\frac{5}{3}}\cos^5 t+R^{\frac{5}{3}}\sin^5 t}\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3R^3\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^5 t+\sin^5 t\right)}{R^{\frac{5}{3}}\left(\cos^5 t+\sin^5 t\right)}\,dt=3R^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^2 t\;dt=$$

$$=\frac{3}{4}R^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\;dt=\frac{3}{4}R^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt=\frac{3}{8}R^{\frac{4}{3}}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}R^{\frac{4}{3}}.$$

4. Застосування криволінійного інтеграла II роду.

1. Обчислення *площі плоскої фігури*. Нехай на площині Oxy задана замкнена область D, обмежена кривою L. Тоді її площу S можна знайти за однією із наступних формул:



$$S=-\oint_L y\,dx,$$

$$S=\oint_L x\,dy,$$

$$S=\frac{1}{2}\oint_L x\,dy-y\,dx.$$

2. Обчислення *роботи*. Нехай сила $\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ виконує роботу A при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L, причому функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні на кривій L, тоді

$$A=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Приклад 3. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=y^2x^3\vec{i}+\left(y+x^2\right)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по параболі $y=x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

Розв'язання.

$$A=\int_{OB} y^2x^3dx+\left(y+x^2\right)dy=\left[\begin{array}{l} y=x^2 \\ dy=2x\,dx \\ 0\le x\le 1\end{array}\right]=\int_0^1\left(x^4\cdot x^3dx+\left(x^2+x^2\right)2x\,dx\right)=$$

$$=\int_0^1\left(x^7+4x^3\right)dx=\left(\frac{x^8}{8}+4\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{9}{8}.$$

Приклад 4. Знайдіть площу області обмеженої еліпсом

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t.$$

Розв'язання.

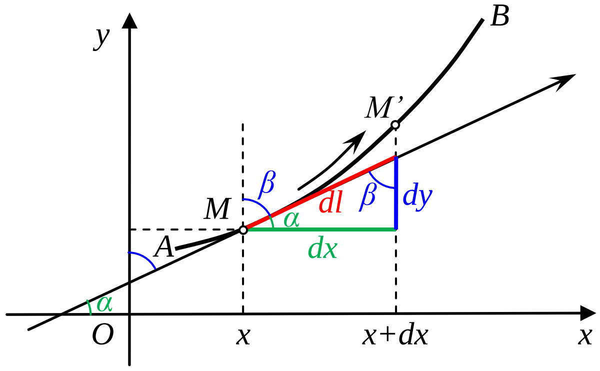
$$S=\frac{1}{2}\oint_L x\,dy-y\,dx=\left[\begin{array}{l} dx=-a\sin t\,dt \\ dy=b\cos t\,dt \\ 0\le t\le 2\pi\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos t\cdot a\cos t+b\sin t\cdot a\sin t\right)dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt=\frac{ab}{2}\,t\,\Bigg|_0^{2\pi}=\pi\,ab\ \ (\textit{кв.один.}).$$

<u>5. Зв'язок між криволінійними інтегралами I та II роду.</u>

Позначимо через α та β кути, які утворює з осями координат напрямна дотична до кривої AB у точці $M(x;y)$. За додатний напрям дотичної беремо той, який відповідає напряму руху точки по кривій від A до B. Враховуючи геометричний зміст диференціала функції та диференціала дуги, маємо

$$dx=\cos\alpha\,dl,\ dy=\cos\beta\,dl. \tag{3}$$



Замінюючи в криволінійних інтегралах другого роду dx та dy їх значеннями (3), перетворимо ці інтеграли в криволінійні інтеграли першого роду:

$$\int_{AB} P(x,y)dx=\int_{AB} P(x,y)\cos\alpha\,dl;$$

$$\int_{AB} Q(x,y)dy=\int_{AB} Q(x,y)\cos\beta\,dl; \tag{4}$$

$$\int_{AB} Pdx+Qdy=\int_{AB}(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,dl.$$

Аналогічно у просторовому випадку отримаємо

$$\int_{AB} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{AB}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dl. \tag{5}$$

Формули (4) і (5) виражають криволінійні інтеграли другого роду через криволінійні інтеграли першого роду і встановлюють зв'язок між ними.