Лекція №3.

Тема: Подвійний інтеграл

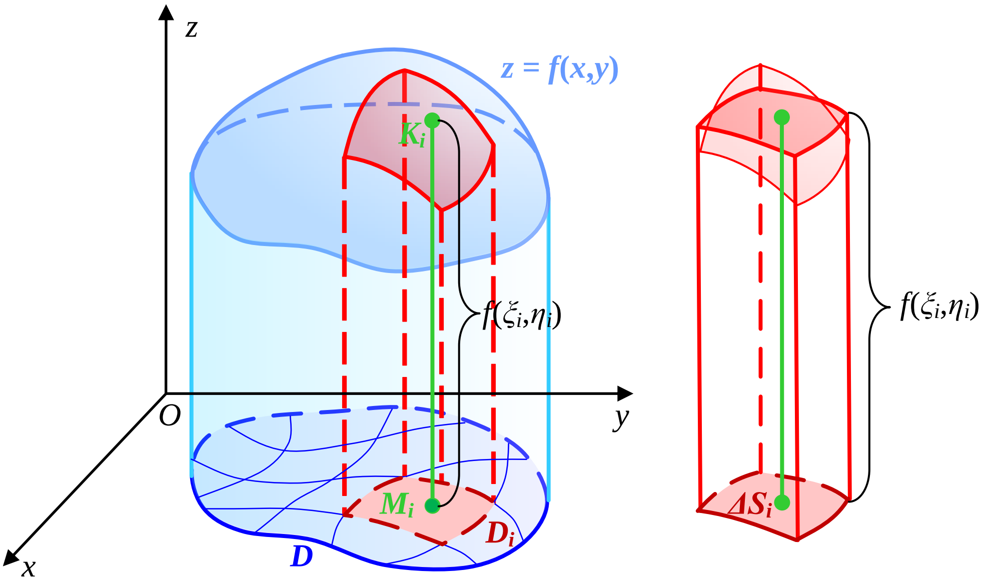
План лекції:

1. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла.
2. Поняття подвійного інтеграла. Геометричний та фізичний зміст. Умови існування. Властивості.
3. Обчислення подвійного інтеграла.

1. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла.

1.1. Задача про об'єм циліндричного тіла.

Нехай тіло обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$, знизу – замкненою обмеженою областю D площини Oxy, з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні осі Oz. Таке тіло називають циліндричним.



Обчислимо його об'єм V. Для цього довільними кривими розіб'ємо область D на n частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок, і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1,2,...,n$. У кожній області D_i виберемо довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$, знайдемо значення функції $f(\xi_i, \eta_i)$ і обчислимо добуток $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i$. Цей добуток дорівнює об'єму циліндричного стовпчика з твірними, паралельними осі Oz, основою D_i і висотою $M_i K_i = f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$. Об'єм ступінчастого тіла складеного з n таких стовпчиків дорівнює сумі

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i \qquad (1)$$

і наближено дорівнює об'єму циліндричного тіла $V_n \approx V$. Це наближення тим точніше, чим більше число n і чим менші розміри областей D_i.

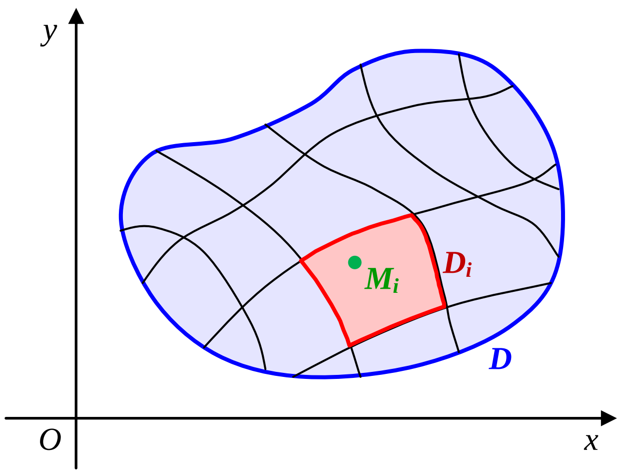
Означення. Назвемо діаметром $diam(G)$ замкненої обмеженої області G найбільшу відстань між будь-якими двома точками межі цієї області.

Позначимо через λ найбільший з діаметрів областей D_i: $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} diam(D_i)$. Тоді природно об'єм даного тіла визначити як границю суми (1) при $\lambda \to 0$:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} V_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i \,. \tag{2}$$

1.2. Задача про масу пластини.

Нехай маємо плоску неоднорідну матеріальну пластину, що має форму області D площини Oxy. І нехай для кожної точки області відома неперервна функція $\gamma = \gamma(x, y)$, яка визначає густину пластини в точці $(x; y)$. Знайдемо масу пластини. Для цього довільними кривими розіб'ємо область D на n частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок, і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1,2,\dots,n$. У кожній області D_i візьмемо довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ і знайдемо густину в цій точці $\gamma(M_i) = \gamma(\xi_i, \eta_i)$. Якщо розміри області D_i достатньо малі, то густина в кожній точці $(x; y) \in D_i$ мало відрізнятиметься від значення $\gamma(M_i)$. Тоді добуток $\gamma(M_i) \cdot \Delta S_i$ наближено визначає масу тієї частини пластини, яка займає область D_i, а сума



$$m_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i \tag{3}$$

є наближеним значенням маси m всієї пластини. Точне значення маси дістанемо як границю суми (3) при $\lambda \to 0$:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} m_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i \,. \tag{4}$$

Таким чином різні за змістом задачі ми звели до знаходження границь (2) і (4) одного й того самого виду. Можна навести ще ряд задач фізики і техніки, розв'язання яких приводить до обчислення подібних границь. Отже, виникає потреба у вивченні властивостей цих границь, незалежно від змісту тієї чи іншої задачі. Кожна така границя називається подвійним інтегралом. Дамо точні означення.

2. Поняття подвійного інтеграла. Геометричний та фізичний зміст. Умови існування. Властивості.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в замкненій обмеженій області $D \subset R_2$. Межа області D складається із скінченного числа неперервних кривих $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$.

Розіб'ємо область D сіткою довільних кривих на n частин D_1, D_2, ..., D_n, які не мають спільних внутрішніх точок. Площі цих частин D_i позначимо ΔS_i, $i = 1,2,...,n$. У кожній області D_i візьмемо довільну точку $M_i(\xi_i;\eta_i)$ і утворимо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\Delta S_i, \tag{5}$$

яку назвемо *інтегральною сумою* функції $z = f(x, y)$ по області D.

Позначимо $\lambda = \max\limits_{i=1,2,..,n} diam(D_i)$ – найбільший із діаметрів областей D_i.

Означення. Якщо інтегральна сума (5) при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області D на частини D_i, ні від вибору в них точок M_i, то ця границя називається *подвійним інтегралом* функції $f(x, y)$ по області D і позначається одним із символів:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS, \text{ або } \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

При цьому область D називається областю інтегрування, функція $f(x, y)$ – інтегровною в цій області, x, y – змінними інтегрування, dS (або $dxdy$) – елементом площі.

Таким чином за означенням

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i. \tag{6}$$

Повернемося тепер до задач 1-ого пункту лекції. Якщо границі в рівностях (2) і (4) існують, то враховуючи рівність (6) отримаємо формули для об'єму циліндричного тіла

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy \tag{7}$$

та маси пластинки

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, dxdy. \tag{8}$$

Якщо у формулі (7) покласти $f(x, y) \equiv 1$, $(x; y) \in D$, то дістанемо формулу для обчислення площі S області D:

$$S = \iint\limits_D dxdy. \tag{9}$$

Рівності (7) і (8) розглядають відповідно як геометричний та фізичний зміст подвійного інтеграла, якщо підінтегральна функція невід'ємна в області D.

Теорема (достатня умова інтегровності функції). Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, то вона інтегровна в цій області.

Деякі властивості подвійного інтеграла.

Вважатимемо підінтегральні функції інтегровними.

1. (*Лінійність* подвійного інтеграла.) Якщо C_1 і C_2 сталі числа, то
$$\iint_D (C_1 f(x, y) \pm C_2 g(x, y))\, dxdy = C_1 \iint_D f(x, y)\, dxdy \pm C_2 \iint_D g(x, y)\, dxdy.$$
2. (*Адитивність* подвійного інтеграла.) Якщо область інтегрування D функції $f(x, y)$ розбити на області D_1 і D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то
$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)\, dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)\, dxdy.$$
3. Якщо в області D має місце нерівність $f(x, y) \geq 0$, то
$$\iint_D f(x, y)\, dxdy \geq 0.$$
4. Якщо в області D $f(x, y) \geq g(x, y)$, то
$$\iint_D f(x, y) dxdy \geq \iint_D g(x, y) dxdy.$$
5. (Оцінка подвійного інтеграла.) Якщо функція неперервна в обмеженій замкненій області D, яка має площу S, то
$$mS \leq \iint_D f(x, y) dxdy \leq MS,$$
де m і M – відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області D.
6. (Середнє значення функції.) Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, яка має площу S, то в цій області існує така точка $(x_0; y_0)$, що
$$\iint_D f(x, y) dxdy = f(x_0, y_0) S.$$

Величину $f(x_0, y_0) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dxdy$ називають *середнім значенням* функції $f(x, y)$ в області D.

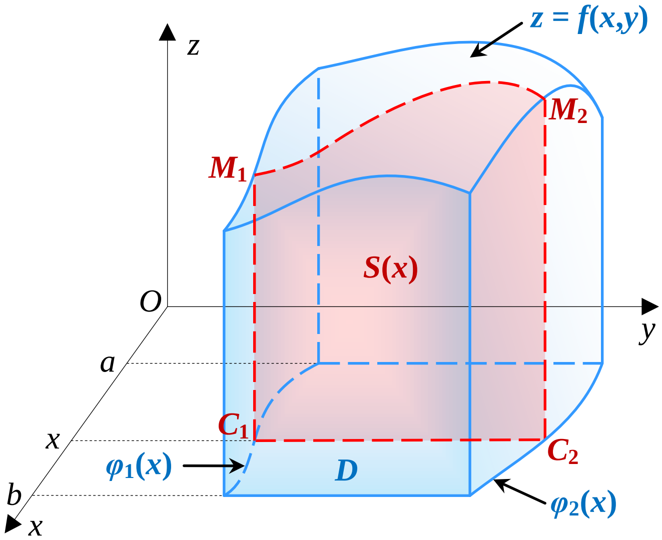
3. Обчислення подвійного інтеграла.

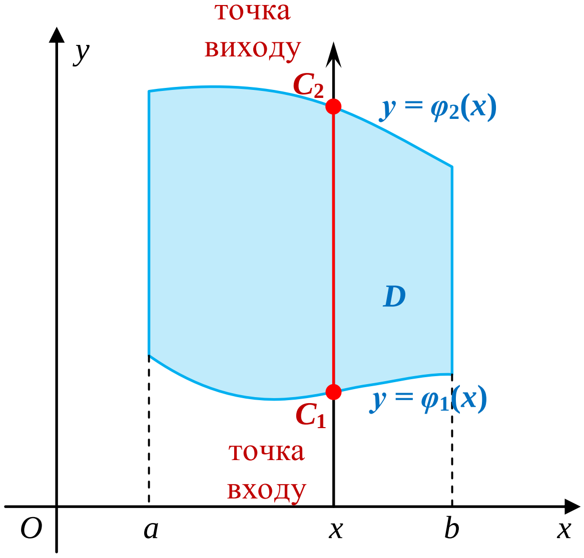
Обчислення подвійного інтеграла за формулою (6) як границі інтегральних сум, так само як і у випадку визначеного інтеграла, пов’язане із значними труднощами. Щоб уникнути їх, обчислення подвійного інтеграла зводять до обчислення так званого повторного інтеграла – двох звичайних визначених інтегралів.

Розглянемо як це робиться. Припустимо, що для всіх точок $(x;y)\in D$ функція $f(x,y)\geq 0$. Тоді, відповідно до формули (7), подвійний інтеграл виражає об'єм циліндричного тіла з основою D, обмеженого зверху поверхнею $z=f(x,y)$. Той самий об'єм можна обчислити методом паралельних перерізів (2 семестр, застосування визначеного інтеграла):

$$V=\int_a^b S(x)\,dx, \tag{10}$$

де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, а $x=a$ та $x=b$ – рівняння площин, які обмежують дане тіло (іншими словами, відрізок $[a;b]$ – проекція тіла на вісь Ox).





Перед тим, як обчислювати площу перерізу $S(x)$ зробимо певні припущення відносно області D.

Припустимо, що область D обмежена знизу кривою $y=\varphi_1(x)$, зверху кривою $y=\varphi_2(x)$, а зліва і справа прямими $x=a$ та $x=b$ відповідно.

Проведемо через точку $(x;0)$, де $x \in (a;b)$, пряму, паралельну осі Oy. Ця пряма перетинає криві $y = \varphi_1(x)$ та $y = \varphi_2(x)$ у точках C_1 і C_2, які називатимемо відповідно точкою входу в область D та точкою виходу з області D. Ординати цих точок позначимо відповідно $y_{вх} = \varphi_1(x)$, $y_{вих} = \varphi_2(x)$.

Визначена таким чином область називається *правильною в напрямі осі* Oy. Інакше кажучи, область D називається правильною в напрямі осі Oy, якщо довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Oy, перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.

Знайдемо тепер площу $S(x)$. Для цього проведемо через точку $(x;0;0)$ площину, перпендикулярну осі Ox. У перерізі цієї площини і циліндричного тіла утворюється криволінійна трапеція $C_1M_1M_2C_2$. Апліката $z = f(x,y)$ точок лінії M_1M_2 при фіксованому x є функцією лише змінної y, причому y змінюється в межах від $y_{вх} = \varphi_1(x)$ до $y_{вих} = \varphi_2(x)$. Площа $S(x)$ трапеції $C_1M_1M_2C_2$ дорівнює визначеному інтегралу

$$S(x) = \int_{y_{вх}}^{y_{вих}} z\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Підставивши знайдене значення $S(x)$ у формулу (10) і враховуючи формулу (7), дістанемо

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

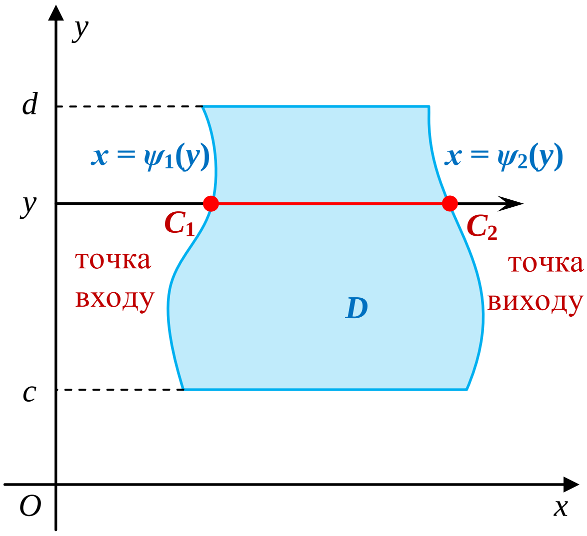
Праву частину цієї рівності називають повторним інтегралом функції $f(x,y)$ по області D. Його прийнято записувати у більш зручній формі

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \tag{11}$$

У повторному інтегралі (11) інтегрування виконується спочатку по змінній y (при цьому x вважається сталою), а потім по змінній x. Інтеграл по змінній y називають внутрішнім, а по змінній x – зовнішнім. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла (в межах від $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$) одержуємо певну функцію від однієї змінної x. Інтегруючи цю функцію в межах від a до b, тобто обчислюючи зовнішній інтеграл, дістаємо деяке число – значення подвійного інтеграла.

Зуваження 1. Рівність (11) доведена нами із геометричних міркувань за умови, що $f(x,y) \ge 0$ для всіх $(x;y) \in D$. Однак вона залишається справедливою і у загальному випадку. Строге доведення цієї формули ми опускаємо.

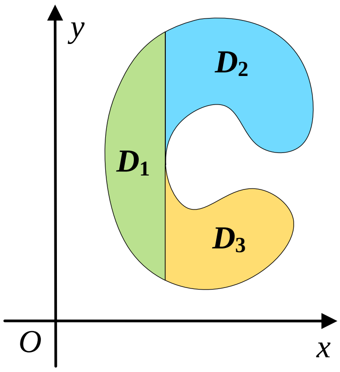
Зуваження 2. Якщо область D обмежена двома неперервними кривими $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$ і двома прямими $y=c$, $y=d$, причому $c<d$ і $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ для всіх $y\in(c;d)$, то область *правильна в напрямку осі* Ox, то справедлива формула



$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \quad (12)$$

Тут внутрішнім є інтеграл по x. Обчислюючи його в межах від $\psi_1(y)$ до $\psi_2(y)$ (при цьому y вважається сталою), дістанемо деяку функцію однієї змінної y. Інтегруючи потім цю функцію в межах від c до d, дістанемо значення подвійного інтеграла.

Зуваження 3. Якщо область D правильна в обох напрямах, то подвійний інтеграл можна обчислювати як за формулою (11), так і за формулою (12). Результати матимемо однакові.



Зауваження 4. Якщо область D не є правильною ні в напрямку осі Ox, ні в напрямку осі Oy (тобто існують вертикальні і горизонтальні прямі, які, проходячи через внутрішні точки області, перетинають її межу більше, ніж у двох точках), то таку область необхідно розбити на частини, кожна з яких є правильною областю в напрямку осі Ox чи Oy. Обчислюючи подвійні інтеграли по правильних областях і додаючи результати (властивість адитивності), знаходимо шуканий подвійний інтеграл по області D. Наприклад, для області, зображеної на рисунку маємо:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)dxdy+\iint_{D_3} f(x,y)dxdy.$$

Зауваження 5. Повторні інтеграли в правих частинах формул (11) і (12) називають *інтегралами з різним порядком інтегрування*. Перехід від формули (11) до формули (12) або навпаки називають зміною порядку інтегрування.

У кожному конкретному випадку, залежно від виду області D та підінтегральної функції $f(x,y)$, потрібно обирати той порядок інтегрування, який веде до простіших обчислень.

Зауваження 6. Правильну в напрямі осі Oy область D коротко позначатимемо так:

$$D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}.$$

Аналогічно

$$D=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$$

– область правильна в напрямі осі Ox.

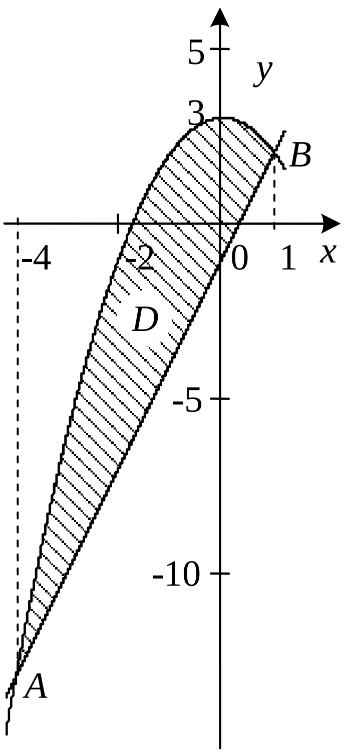
Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy,$$

якщо область D обмежена лініями $y=3-x^2$ і $y=3x-1$.

Розв'язання.

Побудуємо область D. Лінія $y=3-x^2$ – парабола з вершиною в точці $(0;3)$, симетрична відносно осі Oy і обмежує область D зверху. Лінія $y=3x-1$ – пряма, яка обмежує область знизу.



Знайдемо координати точок перетину цих ліній:

$$\begin{cases} y=3-x^2, \\ y=3x-1; \end{cases} \Rightarrow A(-4;-13),\ B(1;2).$$

Оскільки область D є правильною в напрямку осі Oy, то маємо

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy=\int\limits_{-4}^{1}dx\int\limits_{3x-1}^{3-x^2}(x+y)dy=\int\limits_{-4}^{1}\left(\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{3x-1}^{3-x^2}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-4}^{1}\left(x(3-x^2)+\frac{(3-x^2)^2}{2}-x(3x-1)-\frac{(3x-1)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-4}^{1}\left(3x-x^3+\frac{9}{2}-3x^2+\frac{x^4}{2}-3x^2+x-\frac{(3x-1)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{x^4}{4}+\frac{9}{2}x+\frac{x^5}{10}-2x^3+\frac{x^2}{2}-\frac{(3x-1)^3}{18}\right)\Bigg|_{-4}^{1}=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}+\frac{9}{2}+\frac{1}{10}-2+\frac{1}{2}-\frac{4}{9}-24+64+18+\frac{512}{5}-128-8-\frac{2197}{18}=-93{,}75.$$

Приклад 2. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

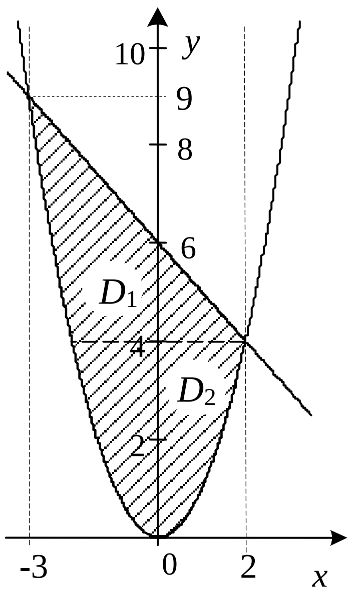
$$\int\limits_{-3}^{2}dx\int\limits_{x^2}^{6-x}f(x,y)dy.$$

Розв'язання.

Побудуємо область D, яка обмежена зліва і справа прямими $x=-3,\ x=2$ відповідно, знизу параболою $y=x^2$, зверху прямою $y=6-x$.

Область правильна відносно вісі Oy. Тобто

$$D=\{(x;y)\,|\,-3\le x\le 2,\ \ x^2\le y\le 6-x\}.$$



Спроектуємо область D на вісь Oy. Проекцією буде відрізок $[0;9]$.

Оскільки лінія, на якій містяться точки виходу з області (під час руху зліва направо), задана двома різними рівняннями $x = 6 - y$ і $x = \sqrt{y}$, то дану область потрібно розбити на дві частини D_1 і D_2. Маємо:

$$D_1 = \left\{ 0 \le y \le 4; -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y} \right\};$$
$$D_2 = \left\{ 4 \le y \le 9; -\sqrt{y} \le x \le 6 - y \right\}.$$

Тому

$$\int_{-3}^{2} dx \int_{x^2}^{6-x} f(x, y)dy = \int_{0}^{4} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)dx + \int_{4}^{9} dy \int_{-\sqrt{y}}^{6-y} f(x, y)dx .$$