Лекція №4

Тема: Подвійний інтеграл

План лекції:

1. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах.
2. Застосування подвійного інтеграла до задач механіки.

1. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах.

Нехай функція неперервна в деякій замкненій і обмеженій області D, тоді існує інтеграл $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Припустимо, що за допомогою формул

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v) \tag{13}$$

ми переходимо в інтегралі I до нових змінних u та v. Будемо вважати, що з формул (13) однозначно можна визначити u та v:

$$u=u(x,y)\ v=v(x,y). \tag{14}$$

Згідно з формулами (14) кожній точці $M(x,y)\in D$ ставиться у відповідність деяка точка $M^*(u,v)$ на координатній площині з прямокутними координатами u та v. Нехай множина всіх точок $M^*(u,v)$ утворює обмежену замкнену область D^*. Формули (13) називаються *формулами перетворення координат*, а формули (14) – *формулами оберненого перетворення*.

Справедливою є наступна теорема.

Теорема. Якщо перетворення (14) переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* і є взаємно однозначним, і якщо функції (13) мають в області D^* неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}, \tag{15}$$

а функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то справедлива така формула заміни змінних:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f\big(x(u,v),y(x,y)\big)|J|dudv\,. \tag{16}$$

Функціональний визначник (15) називається *визначником Якобі* або *якобіаном*.

Таким чином, виконуючи заміну змінних в інтегралі I за формулами (13) необхідно елемент площі $dxdy$ в координатах x,y замінити елементом площі $|J|dudv$ в координатах u,v і стару область інтегрування D замінити відповідною їй областю D^*.

Розглянемо заміну декартових координат x,y полярними координатами ρ,φ за відомими формулами $x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi$. Оскільки

$$J=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi=\rho,$$

то формула (16) набирає вигляд

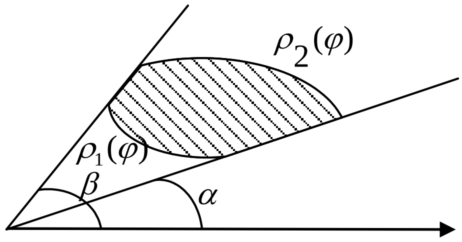
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi, \tag{17}$$

де область D задана в декартовій системі координат OXY, а D^*- відповідна їй область в полярній системі координат.

Зауваження 1. Формулу (17) доцільно використовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння границі області D містить суму $x^2 + y^2$, оскільки ця сума в полярних координатах має досить простий вигляд:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 .$$

Зауваження 2. Якщо область D обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α та β $\alpha < \beta$ і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$, $(\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi))$, то полярні координати області D^* змінюються в межах $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Тому формулу (17) можна записати у вигляді



$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho .$$

Зауваження 3. Якщо область охоплює початок координат, тобто точка $O(0,0)$ є внутрішньою точкою області D, то

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho ,$$

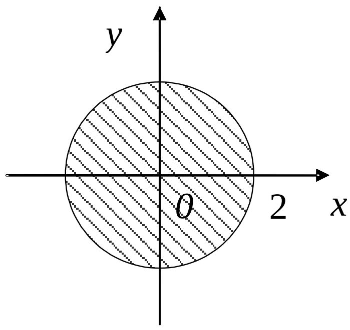
де $\rho(\varphi)$ – полярне рівняння межі області D.

Приклад 1. За допомогою переходу до полярних координат, обчисліть подвійний інтеграл

$$\iint_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}dxdy ,$$

якщо область D – круг радіуса $R = 2$ з центром у початку координат.

Розв'язання.



Покладаючи $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$, маємо

$$\iint_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}dxdy =$$

$$\iint_{D'} \sqrt{4-(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)}\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho = \quad -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4-\rho^2} d(4-\rho^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{2(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^2 d\varphi = \frac{16\pi}{3}.$$

Приклад 2. Обчисліть

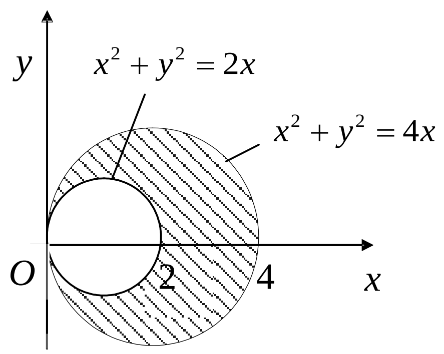
$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy ,$$

якщо область D обмежена колами $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x$.

Розв'язання.

Знайдемо рівняння межі області D в полярних координатах:

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2\rho\cos\varphi ,$$



звідси $\rho = 2\cos\varphi$ – полярне рівняння малого кола. Аналогічно знаходимо полярне рівняння великого кола: $\rho = 4\cos\varphi$.

Отже, як видно з малюнка, якщо кут φ змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то змінна ρ матиме межі від $2\cos\varphi$ до $4\cos\varphi$.

Тоді маємо:

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi = \frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\, d\varphi = = \frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{56}{3}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{224}{9}.$$

2. Застосування подвійного інтеграла до задач механіки.

Площа плоскої фігури, яка має форму замкненої обмеженої області D площини Oxy, обчислюється за формулою:

$$S = \iint_D dxdy.$$

Об'єм циліндричного тіла, яке обмежене зверху неперервною поверхнею $z = f(x, y)$, знизу площиною $z = 0$, а по боках циліндричною поверхнею, яка вирізає на площині Oxy область D, обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D f(x, y)dx\,dy.$$

Якщо *гладка поверхня* задана рівнянням $z = f(x, y)$, то *площа поверхні* обчислюється за формулою:

$$S = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

де D – проекція даної поверхні на площину Oxy.

Якщо *пластинка* займає область D площини Oxy і має змінну густину $\gamma = \gamma(x, y)$, то *маса m пластинки* обчислюється за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x, y)dx\,dy.$$

Статичні моменти пластинки відносно осей Ox та Oy:

$$M_x = \iint_D y\gamma(x, y)dx\,dy, \quad M_y = \iint_D x\gamma(x, y)dx\,dy.$$

Координати центра мас пластинки визначаються формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \;\; y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Зокрема, у випадку однорідної пластинки, $\gamma(x, y) = const$, отримаємо:

$$x_c = \frac{\iint_D x dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}.$$

Моменти інерції пластинки відносно осей Ox та Oy :

$$I_x = \iint_D y^2\gamma(x, y)dx\,dy, \; I_y = \iint_D x^2\gamma(x, y)dx\,dy,$$

Момент інерції відносно початку координат :

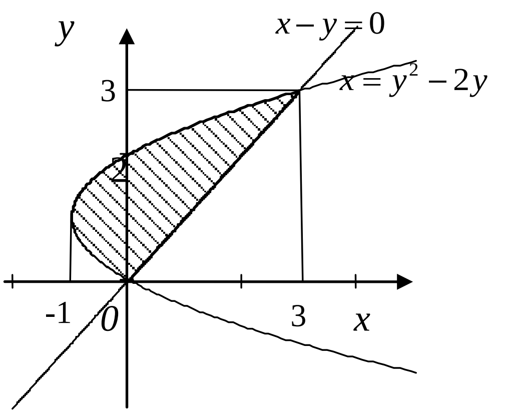
$$I_o = \iint_D (x^2+y^2)\gamma(x, y)dx\,dy = I_x + I_y.$$

Приклад 3. Знайдіть площу фігури, яка обмежена лініями:

$$x = y^2 - 2y, \; x - y = 0.$$

Розв'язання.

Знайдемо ординати точок перетину даних ліній.



Із системи $\begin{cases} x = y^2 - 2y, \\ x - y = 0, \end{cases}$ маємо: $y_1 = 0,\ y_2 = 3$.

Тоді площа даної фігури буде рівна:

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^3 dy \int\limits_{y^2-2y}^{y} dx =$$

$$= \int\limits_0^3 (y - y^2 + 2y)dy = \int\limits_0^3 (3y - y^2)dy =$$

$$\int\limits_0^3 (y - y^2 + 2y)dy =$$

$$= \int\limits_0^3 (3y - y^2)dy = \left(\frac{3}{2}y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{6}(кв.од).$$

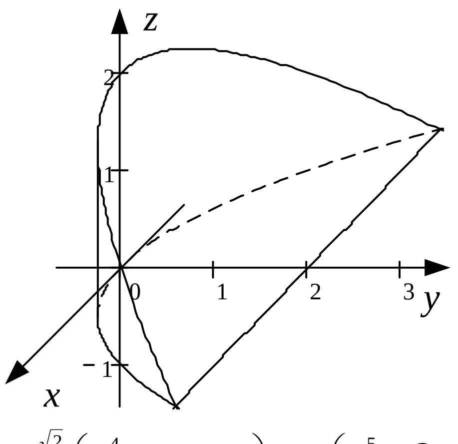
Приклад 4. Знайдіть об'єм тіла, обмеженого циліндром $y = x^2$ та площинами $z = 0$, $z = 2 - y$.

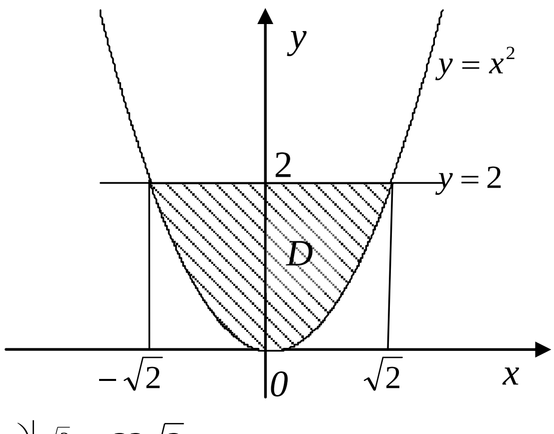
Розв'язання.

Зробимо рисунок тіла та його проекції на площину Oxy. Областю D (проекція тіла на площину Oxy) є параболічний сегмент, який обмежений $x^2 \le y \le 2$ та $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$. Об'єм вказаного тіла шукаємо за формулою

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dx\,dy.$$

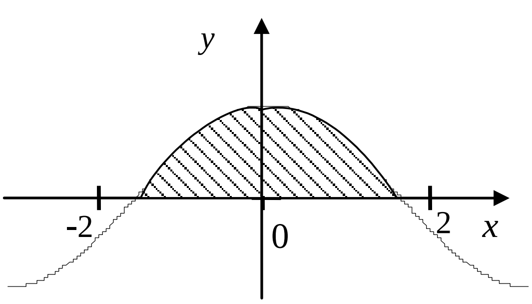
$$V = \iint\limits_D (2-y)dxdy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{2} (2-y)dy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{2} dx =$$





$$= \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 2\right)dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + 2x\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{15}\ (куб.од).$$

Приклад 5. Знайдіть центр ваги однорідної пластинки ($\gamma = 1$), обмеженої кривою $y = \cos\varphi, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ та віссю Ox.



Розв'язання.

Внаслідок симетрії пластинки відносно осі Oy маємо $x_C = 0$. Для знаходження y_C скористаємось формулою

$y_c = \dfrac{\iint\limits_D y dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy} = \dfrac{M_x}{m}$. У даному випадку

$$D=\left\{0\le y\le \cos x,\ -\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Обчислимо M_x, m

$$M_x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\cos x}ydy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx==\frac{1}{4}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

$$m=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\cos x}dy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2.$$ Тоді $y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\pi}{8}$.

Отже, центр ваги даної пластинки міститься в точці $\left(0;\frac{\pi}{8}\right)$.