Лекція №5

Тема: Потрійний інтеграл

План лекції:

1. Поняття потрійного інтеграла. Умови його існування та властивості.
2. Обчислення потрійного інтеграла.
3. Заміна змінної у потрійному інтегралі.
4. Деякі застосування потрійного інтеграла.

1. Поняття потрійного інтеграла. Умови його існування та властивості.

Схема побудови потрійного інтеграла така ж, як і звичайного визначеного інтеграла та подвійного інтеграла.

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена в обмеженій замкненій області $G \subset R_3$. Розіб'ємо область G сіткою поверхонь на n частин G_i, які не мають спільних внутрішніх точок і об'єми яких дорівнюють $\Delta V_i, i = 1,2,...n$. $i = 1,2,\ldots,n$. У кожній області G_i візьмемо довільну точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$ і утворимо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i, \qquad (1)$$

яку назвемо *інтегральною сумою* для функції $f(x, y, z)$ по області G.

Нехай $\lambda = \max\limits_{i=1,2,..,n} diam(G_i)$ – найбільший з діаметрів областей D_i.

Означення. Якщо інтегральна сума (1) при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області G на частинні області G_i, ні від вибору точок M_i в них, то ця границя називається *потрійним інтегралом* і позначається одним із таких символів:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dV, \text{ або } \iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Таким чином, за означенням

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i, \qquad (2)$$

де $f(x, y, z)$– функція інтегрована в області G; G– область інтегрування; x, y, z – змінні інтегрування; dV або $dxdydz$ – елемент об'єму.

Якщо по тілу G розподілено масу з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$ в точці $(x, y, z) \in G$, то маса цього тіла знаходиться за формулою:

$$m = \iiint\limits_G \gamma(x, y, z)\, dxdydz.$$

Дана формула може розглядатись як *механічний зміст потрійного інтеграла* коли підінтегральна функція невід'ємна в області G.

Якщо всюди в області покласти $\gamma(x, y, z) = 1$, то з формули (2) випливає формула для обчислення об'єму V тіла G:

$$V = \iiint\limits_G dxdydz.$$

Умови існування потрійного інтеграла.

Теорема (достатня умова). Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, то вона в цій області інтегрована.

Властивості потрійного інтеграла.

1. (*Лінійність* потрійного інтеграла.) Якщо C_1 і C_2 сталі числа, то

$$\iiint\limits_G (C_1 f(x, y, z) \pm C_2\varphi(x, y, z))dV = C_1\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dV \pm C_2\iiint\limits_G \varphi(x, y, z)\, dV.$$

2. (*Адитивність* потрійного інтеграла.) Якщо область інтегрування G функції $f(x,y)$ розбити на частини G_1 і G_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)\,dV.$$

3. Якщо в області G має місце нерівність $f(x,y,z) \ge 0$, то і

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz \ge 0.$$

4. Якщо в області G $f(x,y,z) \ge g(x,y,z)$, то і

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz \ge \iiint\limits_G g(x,y,z)dxdydz.$$

5. *(Оцінка потрійного інтеграла).* Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, яка має об'єм V, то

$$mV \le \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz \le MV,$$

де m і M – відповідно найменше та найбільше значення функції $f(x,y,z)$ в області G.

6. *(Середнє значення функції).* Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, яка має об'єм V, то в цій області існує така точка (x_0, y_0, z_0), що

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)\cdot V.$$

Величина

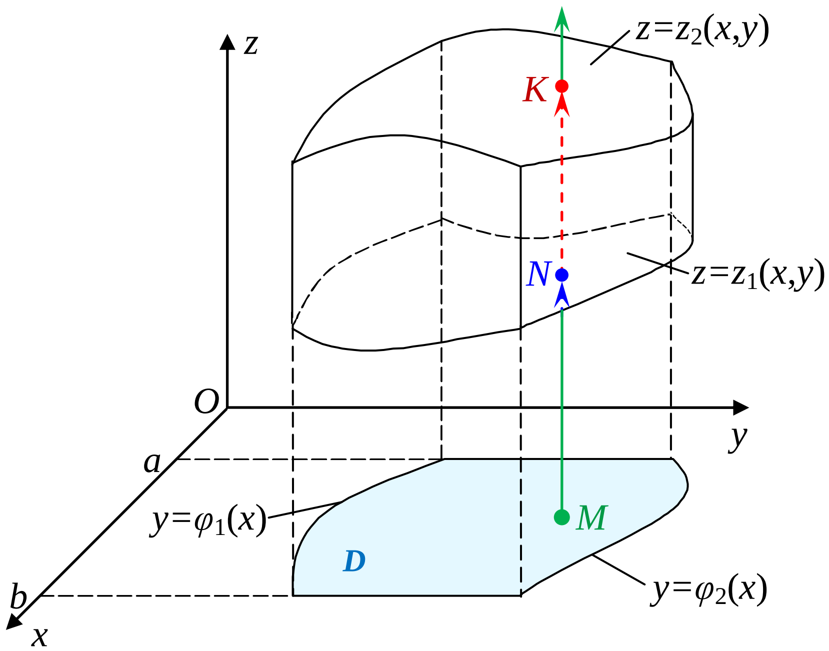
$$f(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{V}\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$$

називається середнім значенням функції $f(x,y,z)$ в області G.

2. Обчислення потрійного інтеграла.

Якщо область інтегрування G така, що її проекція на площину Oxy, область D, правильна в напрямку осі Oy, а всяка пряма, що проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Oz перетинає границю області G рівно в двох точках (точка входу N та точка виходу K), які лежать на поверхнях $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$, то:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (3)$$



У цій формулі спочатку обчислюється інтеграл по змінній z при умові, що x, y – сталі величини, після чого отримують подвійний інтеграл по змінних y і x.

Відмітимо, що область G, яка задовольняє вказаним вище умовам, називається правильною у напрямі осі Oz.

Якщо область D правильна у напрямі осі Ox, то формула (3) запишеться по-іншому

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Якщо ж, наприклад, область G правильна у напрямі осі Ox:

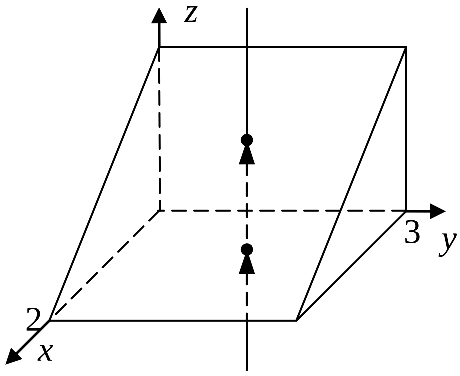
$$G = \{(x,y,z) \mid c \le y \le d,\ \mu_1(y) \le z \le \mu_2(y),\ x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z)\},$$

тоді

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\mu_1(y)}^{\mu_2(y)} dz \int\limits_{x_1(z,y)}^{x_2(z,y)} f(x,y,z)dx.$$

У випадку, якщо область G правильна у всіх напрямах, то повторний інтеграл можна записати 6-ма різними способами. Порядок інтегрування потрібно обирати так, щоб обчислення були найпростішими.

Приклад 1. Обчисліть $\iiint\limits_G xdxdydz$, якщо область G обмежена площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ y=3,\ x+z=2$.



Розв'язання.

Область G проектується на площину Oxy у прямокутник $D = \{0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 3\}$. Оскільки $z_1 = 0$ (вхід), $z_2 = 2 - x$ (вихід), то маємо

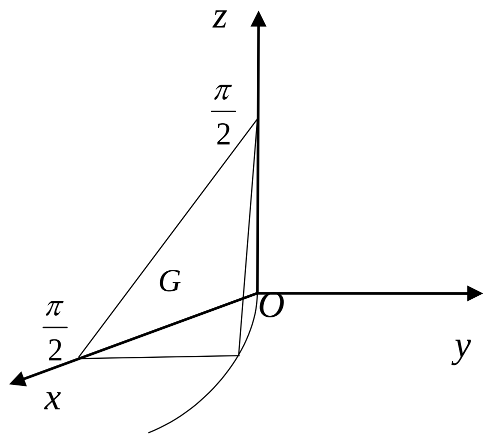
$$\iiint\limits_G xdxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{2-x} xdz =$$

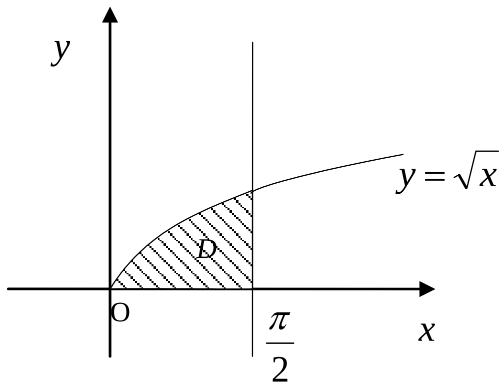
$$= \int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^3 \left(z\,\Big|_0^{2-x}\right)dy = \int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^3 (2-x)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(x\cdot(2-x)\cdot y\,\Big|_0^3\right)dx = 3\int\limits_0^2 (2x - x^2)dx = 3\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 3\left(4 - \frac{8}{3}\right) = 4.$$

Приклад 2. Обчисліть $\iiint\limits_G y\cos(z+x)dxdydz$, якщо область G обмежена циліндром $y=\sqrt{x}$ та площинами $y=0,\ z=0,\ x+z=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання.





Область $D = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \sqrt{x}\right\}$ є проекцією просторової області G на площину Oxy. У напрямку осі Oz область G обмежена площинами $z=0$ та $x+z=\frac{\pi}{2}$. Тому

$0 \le z \le \frac{\pi}{2} - x$. Тоді маємо: $\iiint\limits_G y\cos(z+x)dxdydz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)dz =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} \left(y\sin(z+x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x} dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} \left(y\sin\left(\frac{\pi}{2}-x+x\right) - y\sin x\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} \left(y - y\sin x\right)dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{\sin x}{2}y^2\right)\Bigg|_0^{\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sin x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xdx - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left(-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx\right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

3. Заміна змінної у потрійному інтегралі.

Розглянемо потрійний інтеграл $\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz$, де функція $f(x, y, z)$ неперервна в просторовій області G. Нехай область G простору $Oxyz$ пов'язана взаємнооднозначною відповідністю з областю G' простору $O'uvw$ за допомогою формул:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$$

де $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ $z(u, v, w)$ неперервні і мають частинні похідні 1-го порядку по змінних u, v, w в області G'.

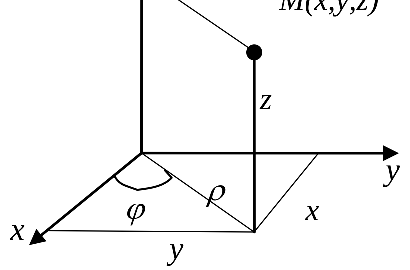
Означення. Визначник

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

називають *якобіаном* даного відображення.

Теорема. Якщо $J(u, v, w) \ne 0$ в області G', то має місце *формула заміни змінних у потрійному інтегралі*:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w)) \cdot |J(u, v, w)|\, dudvdw.$$



На практиці найчастіше використовуються циліндричні та сферичні координати.

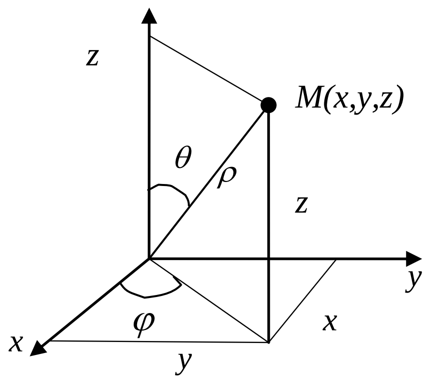
1) *Циліндричні координати* ρ, φ, z пов'язані з декартовими x, y, z співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

$$0 \le \rho < +\infty, \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ -\infty < z < +\infty,$$

оскільки $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + 0 + 0 - 0 - 0 + \rho\sin^2\varphi = \rho$, то має місце така формула:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\rho d\rho d\varphi dz.$$



2) *Сферичні координати* $\rho,\ \varphi,\ \theta$, пов'язані з декартовими $x,\ y,\ z$ співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta, \end{cases}$$

$$0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,$$

$J = \rho^2\sin\theta$, тому має місце формула:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

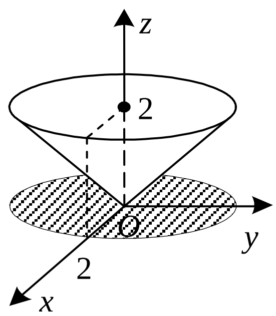
Зауваження 1. При обчисленні потрійного інтеграла в циліндричних чи сферичних координат область G', як правило не будують, а межі інтегрування знаходять безпосередньо за областю G, користуючись геометричним змістом нових координат.

Зауваження 2. До *циліндричних координат* буває доцільно переходити, якщо область інтегрування є круговим циліндром, прямолінійні твірні якого паралельні осі Oz. Рівняння такого циліндра в сферичних координатах $\rho = const.$

Зауваження 3. Переходити до *сферичних координат* зручно, коли область інтегрування є куля (рівняння її межі $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ у сферичних координатах має вигляд $\rho = R$) або його частина, а також якщо підінтегральна функція містить вираз $x^2 + y^2 + z^2$.

Приклад 1. Обчисліть $\iiint\limits_G zdxdydz$, якщо область G обмежена конічною поверхнею $z^2 = x^2 + y^2$ і площиною $z = 2$.

Розв'язання.



Дане тіло, обмежене знизу конусом $z^2 = x^2 + y^2$, а зверху площиною $z = 2$. Його проекцією на площину Oxy є круг $x^2 + y^2 \le 4$. Використаємо циліндричні координати.

Рівняння заданого конуса в циліндричних координатах набуде вигляду $z = \rho$; а рівняння кола, що обмежує проекцію, $\rho = 2$. Отже маємо:

$$\iiint\limits_G zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_\rho^2 zdz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_\rho^2 \rho d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho(2 - \frac{\rho^2}{2})d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(2\rho - \frac{\rho^3}{2}\right)d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{8}\right)\Bigg|_0^2\right)d\varphi = 2\int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi.$$

Приклад 2. Обчисліть $\iiint\limits_G x^2dxdydz$, якщо область G – куля $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

Розв'язання.

Перейдемо до сферичних координат. У даному випадку координати $\rho,\ \varphi,\ \theta$ будуть змінюватися так:

$$0 \le \rho \le R,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\,.$$

Отже,

$$\iiint_G x^2 dxdydz = \iiint_{G'} \rho^4 \sin^3\theta\cos^2\varphi d\rho d\varphi d\theta = \iiint_G \rho^2 \sin^2\theta\cos^2\varphi\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^R \rho^4 d\rho = \int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}\frac{\rho^5}{5}\bigg|_0^R \cos^2\varphi d\varphi = \frac{R^5}{5}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= \frac{R^5}{5\cdot 2}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\bigg|_0^{2\pi} d\theta = \frac{R^5 2\pi}{5\cdot 2}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{\pi R^5}{5}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)\left(-d\left(\cos\theta\right)\right) = \frac{\pi R^5}{5}\int_0^{\pi}\left(\cos^2\theta-1\right)d\left(\cos\theta\right) = \frac{\pi R^5}{5}\left(\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right)\bigg|_0^{\pi} = .$$

$$= \frac{\pi R^5}{5}\left(\frac{-1}{3}+1-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{\pi R^5}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4\pi R^5}{15}$$

4. Деякі застосування потрійного інтеграла.

Об'єм області G знаходиться за формулою

$$V = \iiint_G dxdydz\,.$$

Маса тіла із змінною густиною $\gamma = \gamma(x,y,z)$, що займає просторову область G, визначається за формулою:

$$m = \iiint_G \gamma(x,y,z)dxdydz\,.$$

Статичні моменти тіла M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} відносно координатних площин $Oxy,\ Oxz,\ Oyz$:

$$M_{xy} = \iiint_G z\gamma(x,y,z)dxdydz\,,$$

$$M_{xz} = \iiint_G y\gamma(x,y,z)dxdydz\,,$$

$$M_{yz} = \iiint_G x\gamma(x,y,z)dxdydz\,.$$

Координати центра мас тіла x_c, y_c, z_c:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint_G x\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint_G \gamma(x,y,z)dxdydz}\,,$$

$$y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint_G y\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint_G \gamma(x,y,z)dxdydz}\,,$$

$$z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint_G z\gamma(x,y,z)dxdydz}{\iiint_G \gamma(x,y,z)dxdydz}\,.$$

Моменти інерції тіла $I_x,\ I_y,\ I_z$ відносно координатних осей $Ox,\ Oy,\ Oz$:

$$I_x = \iiint_G (y^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz\,,$$

$$I_y = \iiint_G (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz\,,$$

$$I_z = \iiint_G (y^2 + x^2)\gamma(x, y, z)dxdydz\,.$$

Моменти інерції тіла I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} відносно координатних площин $Oxy,\ Oxz,\ Oyz$:

$$I_{xy} = \iiint_G z^2\gamma(x, y, z)dxdydz\,,$$

$$I_{xz} = \iiint_G y^2\gamma(x, y, z)dxdydz\,,$$

$$I_{yz} = \iiint_G x^2\gamma(x, y, z)dxdydz\,.$$

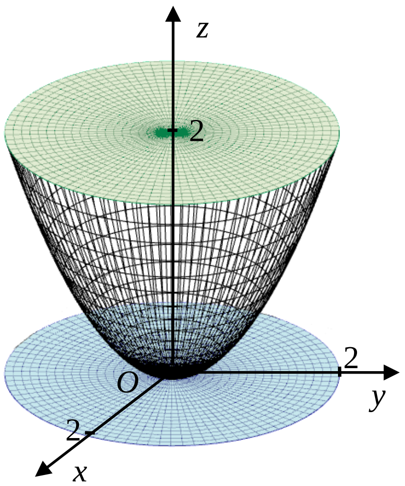
Момент інерції тіла I_0 відносно початку координат

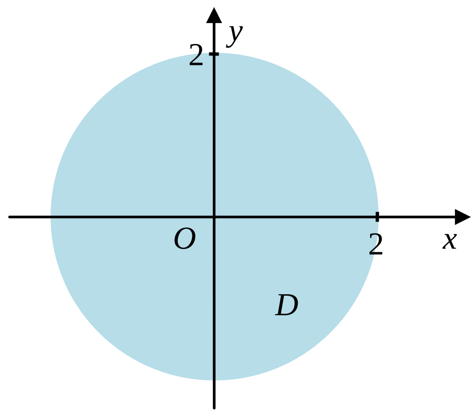
$$I_o = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz\,.$$

Приклад 3. Знайти об'єм тіла обмеженого поверхнями

$$2z = x^2 + y^2,\ z = 2.$$

Розв'язання.





Дане тіло обмежене знизу параболоїдом $2z = x^2 + y^2$, зверху площиною $z = 2$. Позначимо D проекцію цього тіла на площину xOy. Підставимо z із рівняння площини в рівняння параболоїда. Отримаємо рівняння кола $4 = x^2 + y^2$ – межа області D. Отже, D – круг радіуса 2 із центром у початку координат.

Перейдемо до циліндричних координат $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$

Для даного тіла $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 2$ (в межах області D), а змінна z змінюється в межах від параболоїда до площини

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \le z \le 2,\ \frac{1}{2}(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi) \le z \le 2,\ \frac{1}{2}\rho^2 \le z \le 2.$$

Таким чином,

$$V = \iiint_G dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2/2}^{2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \cdot z\Big|_{\rho^2/2}^{2} d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(2\rho - \frac{\rho^3}{2}\right) d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{8}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(4 - \frac{16}{8} - 0\right) d\varphi = 2\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$