Лекція №6

Тема: Поверхневі інтеграли першого роду

План лекції:

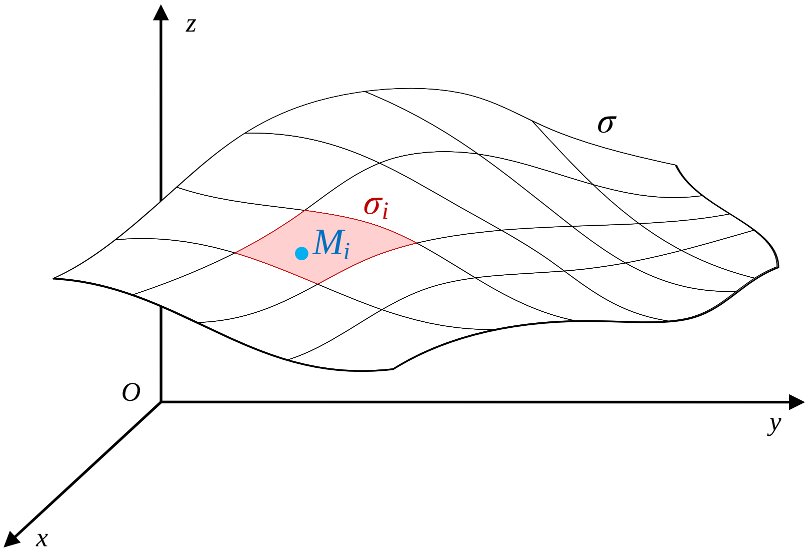
1. Поняття поверхневого інтеграла першого роду. Умови його існування.
2. Обчислення поверхневого інтегралу першого роду.
3. Застосування поверхневих інтегралів першого роду.

1. Поняття поверхневого інтеграла першого роду. Умови його існування.

Означення. Поверхня називається гладкою, якщо в кожній точці поверхні існує дотична площина, положення якої неперервно змінюється разом з точкою дотику.

Означення. Поверхню називають кусково-гладкою, якщо вона складається із скінченого числа неперервно сполучених гладких поверхонь.

Нехай дано гладку або кусково-гладку поверхню σ, в точках якої визначена обмежена функція $f(x, y, z,)$. Розіб'ємо за допомогою кусково-гладких кривих поверхню σ на n частин $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, які не мають спільних внутрішніх точок.



Позначимо $\Delta\sigma_i$ – площу частини розбиття σ_i, $i = 1,2, \ldots, n$. У кожній із цих частин виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $M_i \in \sigma_i$, і утворимо суму

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i \qquad (1)$$

яку називають інтегральною сумою для функції $f(x, y, z,)$ по поверхні σ.

Позначимо $\lambda = \max\limits_{i=1,2,..,n} diam(\sigma_i)$ – найбільший із діаметрів частин σ_i.

Означення. Якщо інтегральна сума при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ на частини σ_i, ні від вибору в них точок M_i, то ця границя називається поверхневим інтегралом I роду від функції $f(x, y, z,)$ по поверхні σ і позначається

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma,$$

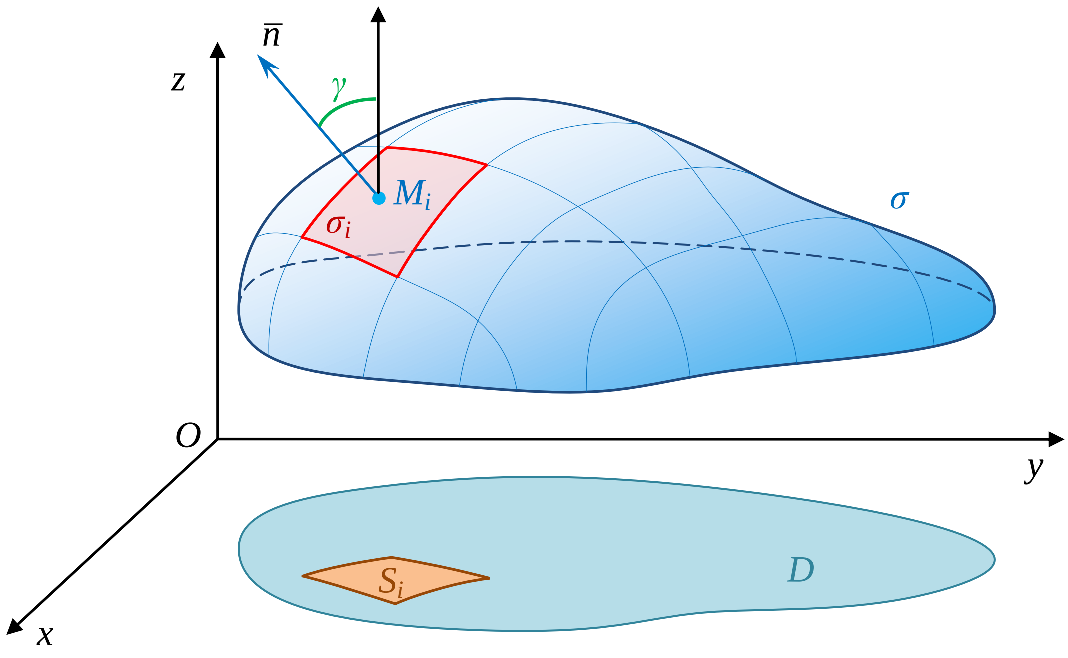
де $f(x, y, z,)$ інтегрована по поверхні,

σ - область інтегрування.

Теорема. Якщо функція неперервна по поверхні σ, то вона інтегрована по цій поверхні.

2. Обчислення поверхневого інтегралу першого роду.

Нехай поверхня σ задана рівнянням $z = z(x, y)$ і взаємно однозначно проектується на площину Oxy в область D_{xy}. І нехай функція $f(x, y, z)$ неперервна в усіх точках цієї поверхні.



Оскільки, поверхня σ гладка, то функція $z = z(x, y)$ неперервна і має неперервні частинні похідні z'_x, z'_y в області D_{xy}. Якщо розбити σ на частини, то область D розіб'ється на частини S_i, які будуть відповідними проекціями σ_i на площину Oxy. Якщо ΔS_i площа S_i, а $\Delta\sigma_i$ - площа σ_i, то $\Delta S_i = \Delta\sigma_i \cdot \cos\gamma \Rightarrow \Delta\sigma_i = \dfrac{\Delta S_i}{\cos\gamma}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta\sigma_i = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \cdot \Delta S_i$. Тому інтегральну суму(1) можна переписати у вигляді $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,\Delta S_i$. Права частина цієї рівності є інтегральною сумою для функції $f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$, $(x, y) \in D$, тому

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy. \qquad (2)$$

Формула (2) виражає поверхневий інтеграл першого роду через подвійний по проекції поверхні σ на площину Oxy.

Аналогічно можна дістати формули, що виражають інтеграл по поверхні σ через подвійні інтеграли по їх проекціях на площини Oxz та Ozy:

σ задана рівнянням $y = y(x, z)$ однозначно проектується на площину Oxz

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\,dxdz\,; \qquad (3)$$

σ задана рівнянням $x = x(y, z)$ однозначно проектується на площину Ozy

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}\,dydz. \qquad (4)$$

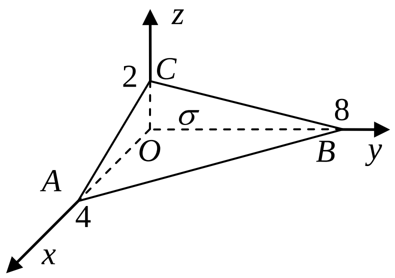
Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду

$$\iint_{\sigma}(x-2y+3z)d\sigma,$$

де σ – частина площини $2x+y+4z=8$, розміщена в I-му октанті.

Розв'язання.

Запишемо рівняння площини у вигляді $z=2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y$. Застосуємо формулу (2), знайшовши:



$$z'_x=-\frac{1}{2},\ z'_y=-\frac{1}{4},$$

$$\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{21}}{4}.$$

Проекцію площини $2x+y+4z=8$ на площину Oxy є трикутник AOB, обмежений прямими $2x+y=8,\ x=0,\ y=0$.

Отже,

$$\iint_{\sigma}(x-2y+3z)dS=\iint_{D_{xy}}\left(x-2y+3\left(2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y\right)\right)\frac{\sqrt{21}}{4}dxdy=\frac{\sqrt{21}}{4}\iint_{D_{xy}}\left(6-\frac{1}{2}x-\frac{11}{4}y\right)dxdy=$$

$$=\left|\begin{matrix}D_{xy}:0\le x\le 4\\ 0\le y\le 8-2x\end{matrix}\right|=\frac{\sqrt{21}}{4}\int_0^4 dx\int_0^{8-2x}\left(6-\frac{1}{2}x-\frac{11}{4}y\right)dy=\frac{\sqrt{21}}{4}\int_0^4\left(\left(6y-\frac{1}{2}xy-\frac{11}{8}y^2\right)\Bigg|_0^{8-2x}\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{4}\int_0^4\left(48-12x-4x+x^2-\frac{11}{8}(8-2x)^2\right)dx=\frac{\sqrt{21}}{4}\left(48x-8x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{11}{16}\frac{(8-2x)^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{4}\left(192-128+\frac{64}{3}-\frac{352}{3}\right)=-8\sqrt{21}.$$

Приклад 2. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint_{\sigma}(x^2+y^2+z)d\sigma,$$

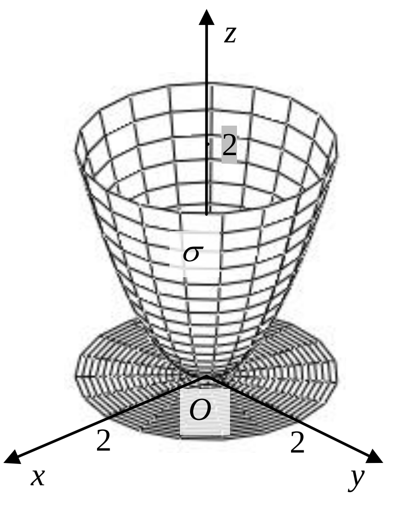
де σ – частина параболоїда $2z=x^2+y^2$, обмежена площиною $z=2$.

Розв'язання.

Застосуємо формулу (2). Знаходимо

$$z'_x=x,\ z'_y=y,\ \sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}.$$

Тоді



$$\iint_{\sigma}(x^2+y^2+z)d\sigma=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{2})\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=$$

$$=\frac{3}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy.$$

Оскільки, область D – круг $x^2+y^2\le 4$, то для обчислення даного подвійного інтегралу перейдемо до полярних координат

$$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi.$$

Рівняння кола (межі області D) набуде вигляду

$$\rho=2,\ 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Отже,

$$\frac{3}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=$$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho==3\pi\int\limits_0^2\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho=$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{1+\rho^2}=t\\ \rho^2=t^2-1\\ \rho d\rho=tdt\\ t_1=1,\ t_2=\sqrt{5}\end{bmatrix}=3\pi\int\limits_1^{\sqrt{5}}(t^2-1)t\cdot tdt=3\pi\int\limits_1^{\sqrt{5}}(t^4-t^2 1)dt=3\pi\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}}=$$

$$=3\pi\left(\frac{10\sqrt{5}}{5}+\frac{2}{15}\right)=\pi\left(10\sqrt{5}+\frac{2}{5}\right).$$

3. Застосування поверхневих інтегралів першого роду.

1. Площа поверхні σ:

$$S_\sigma=\iint\limits_\sigma d\sigma.$$

2. Якщо по кусково-гладкі поверхні σ розподілено масу з поверхневою густиною $\rho=\rho(x,y,z)$, то маса поверхні обчислюється за формулою:

$$m=\iint\limits_\sigma \rho(x,y,z)d\sigma.$$

3. Координати центра мас поверхні:

$$x_c=\frac{1}{m}\iint\limits_\sigma x\rho(x,y,z)d\sigma;\qquad y_c=\frac{1}{m}\iint\limits_\sigma y\rho(x,y,z)d\sigma;\qquad z_c=\frac{1}{m}\iint\limits_\sigma z\rho(x,y,z)d\sigma.$$

4. Статичні моменти відносно координатних площин:

$$M_{yz}=\iint\limits_\sigma x\rho(x,y,z)d\sigma;\qquad M_{yx}=\iint\limits_\sigma z\rho(x,y,z)d\sigma;\qquad M_{xz}=\iint\limits_\sigma y\rho(x,y,z)d\sigma.$$

5. Момент інерції σ відносно осей координат і початку координат:

$$I_x=\iint\limits_\sigma (y^2+z^2)\rho(x,y,z)d\sigma;\ I_y=\iint\limits_\sigma (x^2+z^2)\rho(x,y,z)d\sigma;\ I_z=\iint\limits_\sigma (x^2+y^2)\rho(x,y,z)d\sigma;$$

$$I_O=\iint\limits_\sigma (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)d\sigma.$$