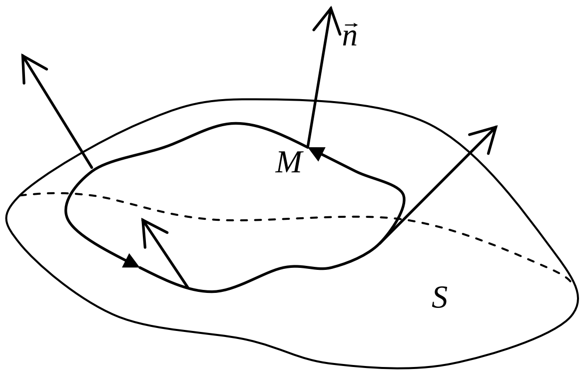
Лекція №7

Тема: Поверхневі інтеграли другого роду

План лекції:

1. Поняття поверхневого інтеграла другого роду. Умови його існування.
2. Обчислення поверхневого інтегралу другого роду.

1. Поняття поверхневого інтеграла другого роду. Умови його існування.



Введемо поняття сторони поверхні. Візьмемо на гладкій поверхні σ довільну точку M, проведемо в ній нормаль $\vec{n}$ певного напрямку і розглянемо на поверхні σ замкнений контур, який виходить із точки M і повертається в точку M, не перетинаючи при цьому межі поверхні σ.

Будемо переміщувати точку M по замкненому контуру разом з вектором $\vec{n}$ так, щоб вектор $\vec{n}$ весь час залишався нормальним до поверхні σ. При обході заданого контуру ми можемо повернутися в точку M з тим самим або з протилежним напрямом нормалі.

1. Якщо у довільну точку M поверхні σ після обходу довільного замкненого контуру, розміщеного не поверхні σ, який не перетинає її межу, ми повертаємось з початковим напрямом нормалі $\vec{n}$, то поверхню називають двосторонньою.

2. Якщо при обході деякого контуру напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхню називають односторонньою.

Прикладами двосторонніх поверхонь є: площина, сфера, довільна замкнена поверхня без само перетинів, довільна поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$– неперервні функції в деякій області D площини Oxy.

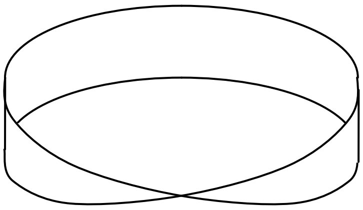


Рис. Лист Мебіуса.

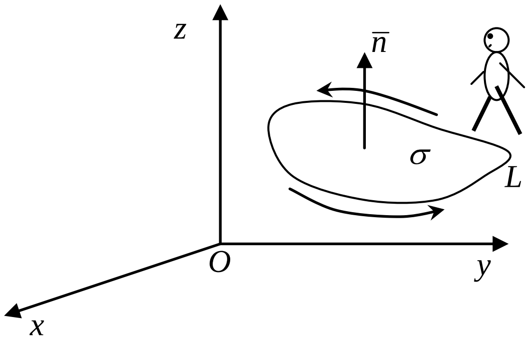
Прикладом односторонньої поверхні є так званий лист Мебіуса.

Означення. Двосторонню поверхню називають орієнтованою, а вибір певної її сторони орієнтацією поверхні.

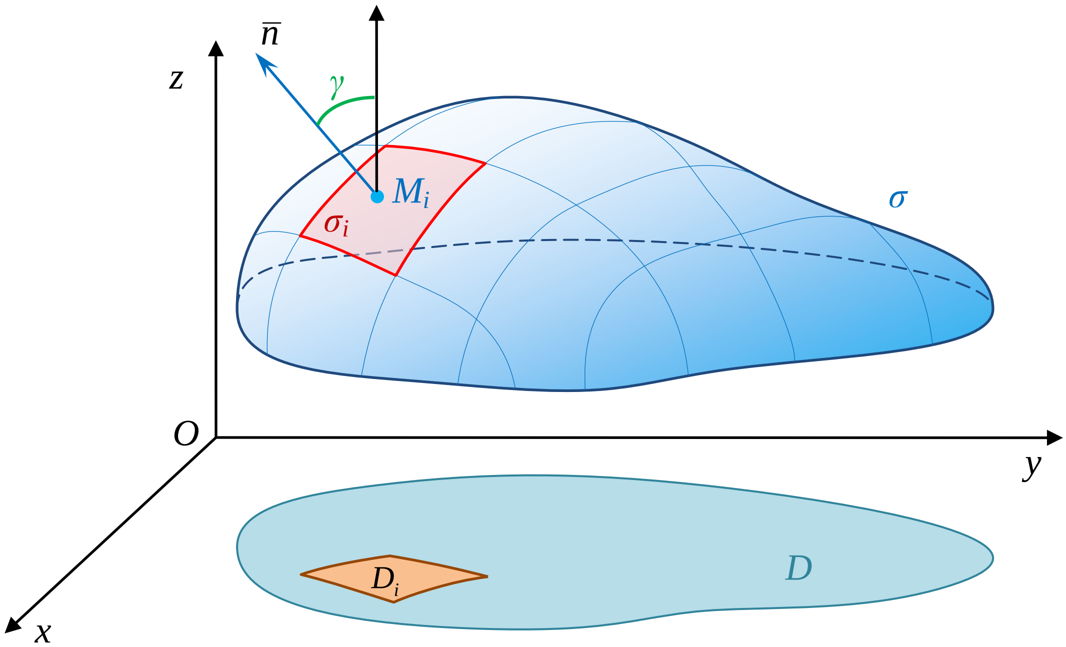
Направивши в кожній точці замкненої поверхні нормаль всередину об'єму, обмеженого поверхнею, дістанемо внутрішню сторону поверхні, а направивши нормаль зовні – зовнішню сторону поверхні.

Надалі будемо розглядати двосторонні поверхні.

Нехай σ орієнтована поверхня (вибрано сторону), обмежена контуром L, який не має точок самоперетину. Будемо вважати за додатний той напрям обходу контуру L, при якому спостерігач, розміщений так, що напрям нормалі збігається з напрямом від ніг до голови, при русі залишає поверхню зліва від себе. Протилежний напрям обходу – від'ємний.



З'ясуємо поняття поверхневого інтеграла другого роду. Нехай σ – гладка поверхня, задана рівнянням $z = f(x, y)$ і $R(x, y, z,)$ – обмежена функція, визначена в точках поверхні σ.



Зорієнтуємо поверхню σ. Розіб'ємо її на n частин. Позначимо через D_i – проекцію σ_i на площину Oxy, а через ΔS_i^* – площу D_i взяту із знаком (+), якщо обрано зовнішню сторону поверхні σ, і із знаком (–), якщо внутрішня сторона поверхні σ. Виберемо в кожній σ_i довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ і складемо суму $\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i^*$, яку назвемо інтегральною сумою функції $R(x, y, z,)$ по поверхні σ. Позначимо через $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(\sigma_i)$ максимальний діаметр поверхонь σ_i.

Означення. Якщо інтегральна сума при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ на частини σ_i, ні від вибору в них точок M_i, то ця границя називається поверхневим інтегралом II роду від функції $R(x, y, z)$ по поверхні σ і позначається

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy .$$

Отже,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i^* = \iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy .$$

З означення поверхневого інтеграла другого роду випливає, що при заміні орієнтації поверхні на протилежну інтеграл змінює свій знак.

Припустимо, що поверхню σ можна взаємно однозначно проектувати також на координатні площини Oxz та Oyz, і нехай $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ визначені та обмежені в точках поверхні функції σ, тоді аналогічно можна дати означення ще двох поверхневих інтегралів другого роду:

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz \text{ і } \iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz .$$

На практиці найпоширенішим є поверхневі інтеграли, які об'єднують усі три названі, тобто

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy =$$

$$= \iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz + \iint_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz + \iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy.$$

2. Обчислення поверхневого інтегралу другого роду.

Нехай функція $R(x, y, z)$ неперервна в усіх точках гладкої поверхні σ, яка задана рівняннями $z = z(x, y)$. Поверхня σ взаємнооднозначно проектується в область D_{xy} площини Oxy.

Виберемо верхню сторону поверхні σ, яку позначимо σ_+ (сторона поверхні, в кожній точці якої нормаль утворює з додатним напрямом осі Oz гострий кут), тоді

$$\iint_{\sigma_+} R(x, y, z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy .$$

Якщо вибрати нижню сторону поверхні σ_- (нормаль до вибраної сторони поверхні утворює з віссю Oz тупий кут), то одержаний подвійний інтеграл беруть зі знаком «мінус», тобто

$$\iint_{\sigma_-} R(x, y, z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy .$$

Аналогічно, якщо гладку поверхню σ задано рівнянням $x = x(y, z)$, то

$$\iint_{\sigma_+} P(x, y, z)dydz = \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)dydz ,$$

$$\iint_{\sigma_-} P(x, y, z)dydz = -\iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)dydz .$$

Знак «+» беремо, коли нормаль до поверхні σ, утворює з віссю Ox гострий кут, а знак «–», коли кут тупий. D_{yz} – проекція поверхні σ на площину Oyz.

Якщо гладку поверхню S задано рівнянням $y = y(x, z)$, то

$$\iint_{\sigma_+} Q(x, y, z)dxdz = \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)dxdz ,$$

$$\iint_{\sigma_-} Q(x, y, z)dxdz = -\iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)dxdz .$$

Знак «+» беремо, коли нормаль до поверхні σ, утворює з віссю Oy гострий кут, а знак «–», коли кут тупий. D_{xz} – проекція поверхні σ на площину xOz.

Якщо поверхня неоднозначно проектується на яку-небудь координатну площину, то цю поверхню розбивають на частини, які проектуються взаємнооднозначно, а інтеграл обчислюють як суму інтегралів по одержаних частинах поверхні σ.

Зауваження. У випадку, коли потрібно обчислити загальний інтеграл другого роду

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy ,$$

по поверхні σ, яка задана рівнянням $z = z(x, y)$, можна скористатися формулою:

$$\iint_{\sigma_\pm} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy =$$

$$= \pm\iint_{D_{xy}} \Big(P(x, y, z(x, y))(-z'_x) + Q(x, y, z(x, y))(-z'_y) + R(x, y, z(x, y))\Big)dxdy.$$

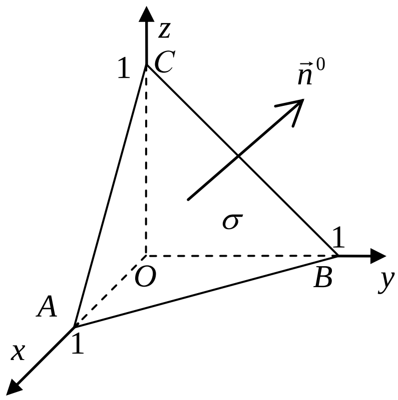
Якщо сторона поверхні верхня, тобто нормаль до цієї поверхні утворює з віссю Oz гострий кут, то вибираємо знак «+», якщо нижня то «–».

Приклад **1.** Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint_{\sigma} (x+1)dydz ,$$

де σ – верхня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x + y + z = 1$ з координатними площинами.

Розв’язання.



Нормальний вектор $\vec{n}^0$ до поверхні σ утворює гострий кут з віссю Ox. Отже при переході до подвійного інтеграла маємо знак «+».

Проектуємо поверхню σ з рівнянням $x+y+z=1$ на координатну площину Oyz в трикутник OBC.

$$D_{yz}:\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1-y.$$

Рівняння поверхні запишемо у вигляді

$$x=1-y-z.$$

Тоді

$$\iint_\sigma (x+1)dydz=\iint_{D_{yz}}(1-y-z+1)dydz=\iint_{D_{yz}}(2-y-z)dydz=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}(2-y-z)dz=$$

$$=\int_0^1\left(\left(2z-yz-\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-y}\right)dy=\int_0^1\left(2(1-y)-y(1-y)-\frac{(1-y)^2}{2}\right)dy=$$

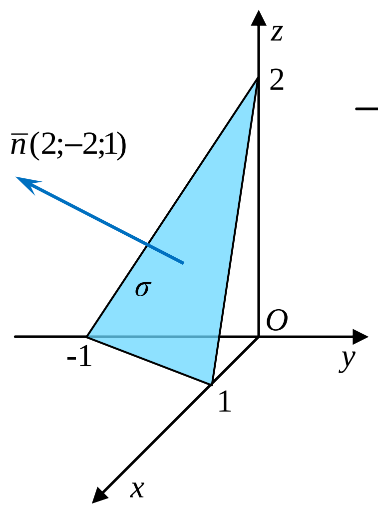
$$=\int_0^1\left(2-3y+y^2-\frac{(1-y)^2}{2}\right)dy=\left(2y-\frac{3}{2}y^2+\frac{y^3}{3}+\frac{(1-y)^3}{6}\right)\Bigg|_0^1=$$

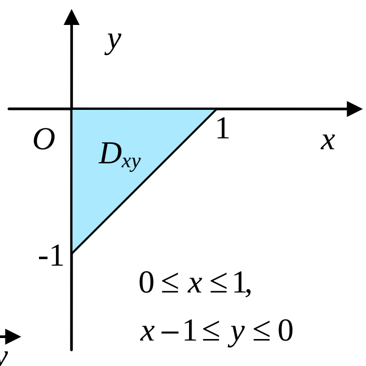
$$=2-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

Приклад. Обчислити

$$\iint_\sigma\left(x-y+\frac{3}{2}z\right)dydz+xdxdz+zdxdy,$$

якщо σ – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $2x-2y+z-2=0$ з координатними площинами.





Розв’язання.

Скористаємось зауваженням.

Із рівняння поверхні σ маємо:

$$2x-2y+z-2=0\Rightarrow z=-2x+2y+2,$$

$$z'_x=-2,\ z'_y=2.$$

Тоді

$$\iint_\sigma\left(x-y+\frac{3}{2}z\right)dydz+xdxdz+zdxdy=$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(\left(x-y+\frac{3}{2}(-2x+2y+2)\right)\cdot 2+x\cdot(-2)+(-2x+2y+2)\right)dxdy=$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left((x-y-3x+3y+3)\cdot 2-2x-2x+2y+2\right)dxdy=$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} (-4x + 4y + 6 - 4x + 2y + 2)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} (-8x + 6y + 8)dxdy = 2\int_0^1 dx \int_{x-1}^{0} (-4x + 3y + 4)dy =$$

$$= 2\int_0^1 \left(-4xy + \frac{3}{2}y^2 + 4y \right)\Bigg|_{x-1}^{0} dx = 2\int_0^1 \left(0 - \left(-4x(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + 4(x-1) \right) \right) dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(4x^2 - 4x - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2} - 4x + 4 \right) dx = 2\int_0^1 \left(\frac{5}{2}x^2 - 5x + \frac{5}{2} \right) dx = 5\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx =$$

$$= 5\int_0^1 (x-1)^2 dx = 5 \cdot \frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_0^1 = 5\left(0 - \frac{-1}{3} \right) = \frac{5}{3}.$$