Тема: Формули Гріна, Стокса, Остроградського-Гаусса.

1.Формула Гріна.

Формула Гріна пов'язує подвійний інтеграл по замкненій області D з криволінійним інтегралом по межі цієї області L.

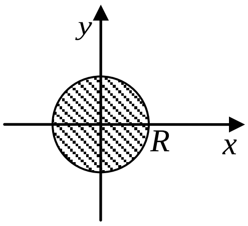
Теорема. Нехай D замкнена область, обмежена контуром L, і функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в цій області. Тоді справедлива формула Гріна

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy .$$

Зауваження. У формулі Гріна при обході контуру L область D залишається весь час зліва, тобто межа L додатно орієнтована.

Приклад 1. Обчислити $\oint_L (x-2y)dx + (x+y)dy$, де L - коло $x^2+y^2=R^2$ за формулою Гріна.

Розв'язок.

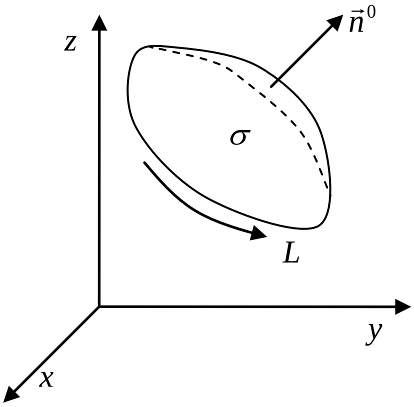


$$P = x-2y,\quad Q = x+y,\quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

$$\oint_L (x-2y)dx + (x+y)dy = \iint_D (1+2)dxdy = 3\iint_D dxdy = 3\pi R^2$$

2.Формула Стокса.

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневими та криволінійними інтегралами.



Нехай σ – гладка орієнтована поверхня, а L – кусково-гладка замкнена крива, яка обмежує σ і орієнтована відповідно до орієнтації поверхні σ (спостерігач розташований вздовж нормалі до обраної сторони поверхні, рухаючись по кривій L, буде бачити поверхню σ зліва). І нехай функції $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ та їх частинні похідні першого порядку неперервні на поверхні σ, тоді має місце формула Стокса

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \iint_\sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix} d\sigma.$$

або

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \iint_\sigma \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)d\sigma,$$

де $\vec{n}^0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ – одинична нормаль до вибраної сторони поверхні σ.

Оскільки,

$$\cos\alpha\, d\sigma = dydz,\ \cos\beta\, d\sigma = dxdz,\ \cos\gamma\, d\sigma = dxdy,$$

то формулу Стокса можна записати у вигляді

$$\oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \iint_\sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

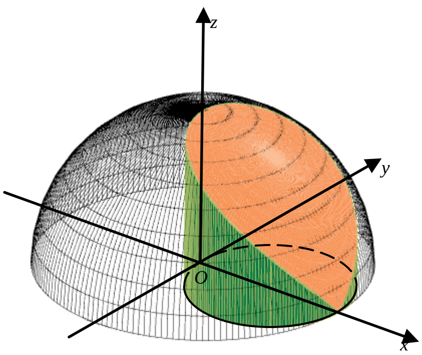
Зауваження. Формула Стокса залишається в силі для кусково-гладких поверхонь, які можна розбити на частини, що взаємнооднозначно проектуються на всі координатні площини.

Приклад 2. Обчисліть криволінійний інтеграл

$$\oint_L (z - 2y + x^3)dx + (2x + z + y^2)dy + (x + y + z^4)dz,$$

де L – крива перерізу циліндра $x^2 + y^2 = Rx$ і сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ при $z \geq 0$, у напрямі проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напряму осі Oz.

Розв'язання.



Скористаємось формулою Стокса:

$P(x, y, z) = z - 2y + x^3,\ Q(x, y, z) = 2x + z + y^2,$

$R(x, y, z) = x + y + z^4.$

Знайдемо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2,\ \frac{\partial P}{\partial z} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2,\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 1,\ \frac{\partial R}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial R}{\partial y} = 1.$$

В якості поверхні σ оберемо частину сфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, що знаходиться в середині циліндра $x^2 + y^2 = Rx$. Проекцією цієї поверхні на площину Oxy буде круг D: $x^2 + y^2 \leq Rx \iff \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{4}$.

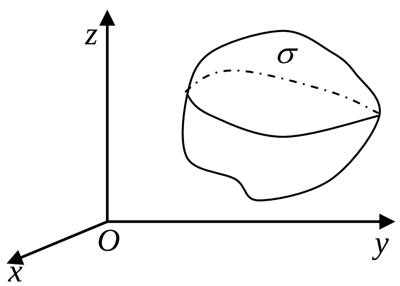
Отже, $\oint_L (z - 2y + x^3)dx + (2x + z + y^2)dy + (x + y + z^4)dz =$

$$= \iint_\sigma (2+2)dxdy + (1-1)dydz + (1-1)dxdz = 4\iint_D dxdy = \pi R^2,$$

оскільки, $\iint_D dxdy$ – це площа круга радіуса $\frac{R}{2}$, яку знаходимо за формулою πr^2 при $r = \frac{R}{2}$.

3. Формула Остроградського-Гаусса.

Формула Остроградського-Гаусса стосується замкнених просторових областей і пов'язує потрійний інтеграл по області $G \subset R_3$ з поверхневим інтегралом по зовнішній стороні поверхні σ, яка обмежує цю область.

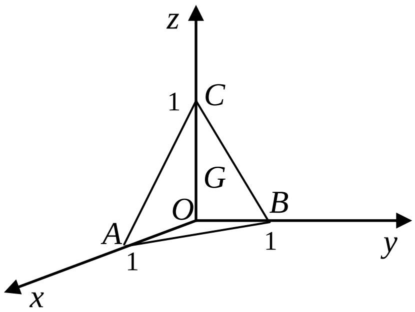


Нехай σ – кусково-гладка поверхня, яка обмежує тіло G, а $P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)$ – неперервні разом з частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ в області G функції.

Тоді справедлива формула Остроградського-Гаусса

$$\iint_\sigma P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Приклад 3. Обчислити $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz + 3ydxdz - 2zxdxdy$, де σ - зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x = 0,\ \ y = 0\ \ z = 0,\ x + y + z = 1$.



Розв'язання.

$$P = x^2,\ Q = 3y,\ R = -2zx,\ \frac{\partial P}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 3,\ \frac{\partial R}{\partial z} = -2x.$$

$$\iint\limits_{\sigma} x^2dydz + 3ydxdz - 2zxdxdy = \iiint\limits_{G} \left(2x + 3 - 2x\right)dxdydz =$$

$$= 3\iiint\limits_{G} dxdydz = 3 \cdot V_{AOBC} = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta AOB} \cdot \left|OC\right| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$