Лекція №9

Тема: Векторне поле.

План лекції:

1. Векторне поле. Векторні лінії.
2. Потік векторного поля.
3. Дивергенція векторного поля.
4. Циркуляція векторного поля.
5. Циркуляція і ротор.
6. Потенціальні та соленоїдальні поля.

<u>1. Векторне поле. Векторні лінії.</u>

Означення. Якщо кожній точці M області G поставлено у відповідність певний вектор $\vec{a}(M)$, то кажуть, що в області G задано *векторне поле* $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M\in G$.

Приклади векторних полів.

1. Поле *швидкостей стаціонарного потоку рідини*.

Нехай область G заповнено рідиною, яка в кожній точці M має певну швидкість $\vec{v}(M)$, яка не залежить від часу (але змінюється від точки до точки), тоді маємо векторне поле швидкостей $\vec{v}=\vec{v}(M),\ M\in G$.

2. Поле *тяжіння*.

Нехай в області G розподілено певну масу. Тоді на кожну матеріальну точку $M\in G$ діє гравітаційна сила $\vec{F}(M)$. Отже, маємо векторне поле тяжіння $\vec{F}=\vec{F}(M)$, $M\in G$, яке називають гравітаційним.

3. *Електростатистичне* поле.

Нехай в області G задано деякий розподіл електричних зарядів, а в точці A простору розташований одиничний заряд. Тоді цей одиничний заряд діє на точку M із області G з певною силою $\vec{\Phi}(M)$. Отже, маємо векторне поле $\vec{\Phi}=\vec{\Phi}(M),\ M\in G$, яке називають електростатистичним полем.

Якщо в просторі вибрана система координат $Oxyz$, то векторне поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$ можна визначити, вказавши функції $P(M)$, $Q(M)$ та $R(M)$ – координати вектора $\vec{a}$. Тобто

$$\vec{a}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)),$$

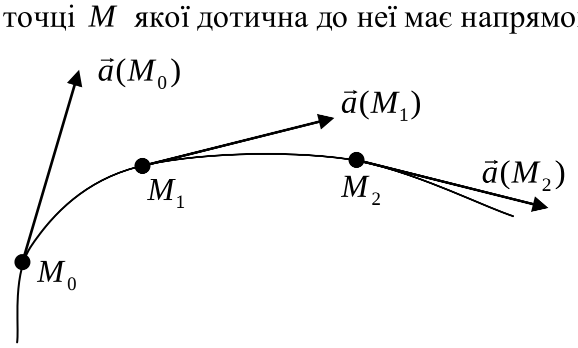
де (x,y,z) – координати точки M у вибраній системі координат.

Зауваження. Надалі будемо вважати, що функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ мають неперервні частинні похідні в G.

Векторні лінії.

Для наочного зображення векторних полів використовують векторні лінії.

Означення. Векторною лінією векторного поля $\vec{a}$ називається така крива L, в кожній точці M якої дотична до неї має напрямок вектора поля $\vec{a}(M)$.



Нехай $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ – параметричні рівняння векторної лінії L поля $\vec{a}(M)$, у векторному вигляді отримаємо:

$$L:\ \vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}.$$

Відомо, що вектор

$$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}=(dx,dy,dz)$$

напрямлений по дотичній до L. З означення векторної лінії випливає, що вектори $\vec{a}$ і $d\vec{r}$ колінеарні в кожній точці L. Тоді умови колінеарності

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

являють собою систему рівнянь, що визначає векторні лінії поля.

2.Потік векторного поля

Нехай в області G простору $Oxyz$ задано векторне поле

$$\vec{a}(x,\, y,\, z) = P(x,\, y,\, z)\vec{i} + Q(x,\, y,\, z)\vec{j} + R(x,\, y,\, z)\vec{k}$$

і деяку гладку або кусково-гладку двосторонню орієнтовану поверхню σ. І нехай

$$\vec{n}^0 = \cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k}$$

– вектор одиничної нормалі в довільній точці до поверхні σ.

Означення. Потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхню σ у напрямі нормалі $\vec{n}^0$ називається поверхневий інтеграл

$$\varPi = \iint_{\sigma} np_{\vec{n}^0}\, \vec{a}\, d\sigma = \iint_{\sigma} \left\langle \vec{a}, \vec{n}^0 \right\rangle d\sigma =$$

$$= \iint_{\sigma} \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma \right) d\sigma.$$

або

$$\varPi = \iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy\,.$$

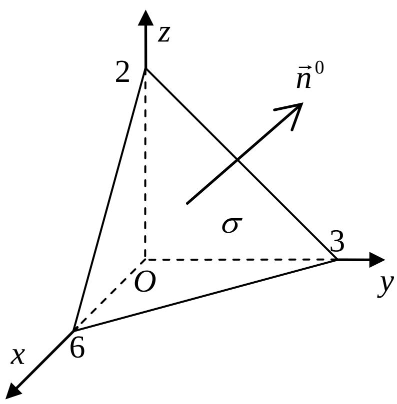
Отже, обчислення потоку векторного поля зводиться до обчислення поверхневих інтегралів.

Приклад 1. Обчисліть потік векторного поля $\vec{a} = 2\vec{i} - x\vec{j} + 5z\vec{k}$ через верхню сторону частини площини $x + 2y + 3z - 6 = 0$, що лежить в першому октанті.

Розв'язання.

Для даного векторного поля

$$P(x,\, y,\, z) = 2,\;\; Q(x,\, y,\, z) = -x,\;\; R(x,\, y,\, z) = 5z\,.$$



За означенням потоку векторного поля маємо

$$\varPi = \iint_{\sigma} (2\cos\alpha - x\cos\beta + 5z\cos\gamma)\; d\sigma\,.$$

Рівняння площини $x + 2y + 3z - 6 = 0$. Одиничний вектор нормалі до верхньої сторони площини має вигляд

$$\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(1;2;3)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}\,,$$

тобто $$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}},\, \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}},\, \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}\,.$$

Маємо

$$\varPi = \iint_{\sigma} \left(\frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{2x}{\sqrt{14}} + \frac{15z}{\sqrt{14}} \right) d\sigma = \left| z = 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y,\; z'_x = -\frac{1}{3}, z'_y = -\frac{2}{3} \right| =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{2x}{\sqrt{14}} + \frac{15}{\sqrt{14}} \cdot \frac{6 - x - 2y}{3} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} dxdy = \frac{1}{3} \iint_{D_{xy}} (32 - 7x - 10y) dxdy =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^6 dx \int_0^{3 - \frac{1}{2}x} (32 - 7x - 10y) dy = \frac{1}{3} \int_0^6 ((32y - 7xy - 5y^2) \Big|_0^{3 - \frac{1}{2}x}) dx =$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^6\left(32\left(3-\frac{1}{2}x\right)-7x\left(3-\frac{1}{2}x\right)-5\left(3-\frac{1}{2}x\right)^2\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^6\left(96-37x+\frac{7}{2}x^2-5\left(3-\frac{1}{2}x\right)^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left(96x-\frac{37x^2}{2}+\frac{7x^3}{6}+10\frac{\left(3-\frac{1}{2}x\right)^3}{3}\right)\Bigg|_0^6=\frac{1}{3}\left(576-\frac{1332}{2}+\frac{1512}{6}-\frac{270}{3}\right)=90.$$

2. Дивергенція векторного поля.

Позначимо

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

– символічний вектор, який називають оператором Гамільтона.

Означення. Дивергенцією векторного поля

$$\vec{a}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

називається скаляр

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\langle\nabla,\vec{a}\rangle.$$

Потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнену поверхню σ можна обчислювати за формулою Остроградського-Гаусса:

$$\iint_\sigma\langle\vec{a},\vec{n}^0\rangle\,d\sigma=\iiint_G\operatorname{div}\vec{a}\,dV.$$

Приклад 2. Обчисліть потік векторного поля

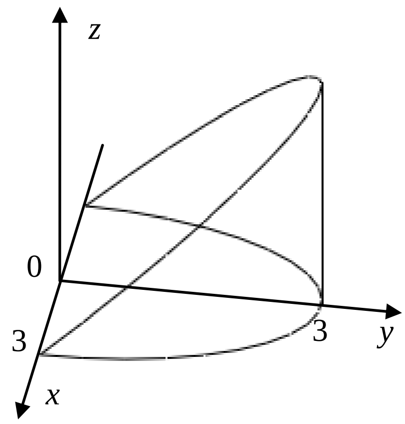
$$\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(z+y)\vec{k}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні

$$\sigma:\{x^2+y^2=9,\ z=0,\ z=y\ (z\ge 0)\}.$$

Розв'язання.

Потік векторного поля $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(z+y)\vec{k}$ обчислимо за формулою Остроградського-Гаусса. Знайдемо дивергенцію даного векторного поля



$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial(x+z)}{\partial x}+\frac{\partial 0}{\partial y}+\frac{\partial(z+y)}{\partial z}=$$

$$=1+1=2.$$

Тоді шуканий потік знайдемо за формулою

$$\Pi=\iiint_G\operatorname{div}\vec{a}\ dxdydz=2\iiint_G dxdydz.$$

G – тіло, обмежене замкненою поверхнею

$$\sigma:\{x^2+y^2=9,\ z=0,\ z=y\ (z\ge 0)\}.$$

Перейдемо до циліндричних координат

$$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi,\ z=z,$$

причому $0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\rho\le 3,\ 0\le z\le y=\rho\sin\varphi$.

Отримаємо:

$$\Pi=2\int_0^\pi d\varphi\int_0^3\rho\,d\rho\int_0^{\rho\sin\varphi}dz=2\int_0^\pi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^3\rho^2d\rho=18\int_0^\pi\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=-18\cos\varphi\Big|_0^\pi=36.$$

5. Циркуляція і ротор.

Нехай в області G задано векторне поле

$$\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

а L – гладка або кусково-гладка замкнена крива, розташована в цій області.

Означення. Криволінійний інтеграл

$$\oint_L \langle \vec{a}, d\vec{r} \rangle = \oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

де $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, називається *циркуляцією* векторного поля $\vec{a}(x, y, z)$ вздовж кривої L.

Циркуляція залежить від вибору напряму на кривій L.

Зауваження. Якщо $\vec{a}$ силове поле, то циркуляція виражає роботу сили $\vec{a}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж шляху L. Для полів іншої природи циркуляція має інший фізичний зміст.

Означення. Вектор, який визначається рівністю

$$\operatorname{rot} \vec{a}(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k}$$

або символічною формулою

$$\operatorname{rot} \vec{a}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = [\nabla, \vec{a}],$$

називають *ротором* або *вихором* вектора $\vec{a}(x, y, z)$.

Формула Стокса у векторній формі має вигляд

$$\oint_L \langle \vec{a}, d\vec{r} \rangle = \iint_\sigma \langle \operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}^0 \rangle d\sigma$$

і означає наступне: циркуляція векторного поля $\vec{a}$ по довільному кусково-гладкому замкненому контуру L дорівнює потоку вектора $\operatorname{rot}\vec{a}$ через поверхню σ, обмежену цим контуром.

6.Потенціальні та соленоїдальні поля.

Означення. Векторне поле $\vec{a}(x, y, z)$, визначене в області G, називається *потенціальним*, якщо існує скалярна величина $u(x, y, z)$, для якої $\vec{a}$ являється градієнтом:

$$\vec{a} = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \nabla u,$$

тобто

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y},\ R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Або іншими словами, якщо вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y, z)$.

Функцію u називають потенціальною функцією векторного поля $\vec{a}$.

Теорема. Для того щоб поле $\vec{a}$ було потенціальним необхідно і достатньо, щоб у всій області G виконувалась рівність

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}.$$

Якщо поле $\vec{a}$ потенціальне, то його циркуляція по довільному простому замкненому контуру дорівнює нулю, а криволінійний інтеграл

$$\int_{AB} \langle \vec{a}, d\vec{r} \rangle$$

залежить лише від положення початкової A та кінцевої B точок інтегрування і не залежить від форми кривої AB.

Потенціальну функцію вектора $\vec{a}$ можна знайти за формулою

$$u(x,y,z)=\int\limits_{M_0M}\langle\vec{a},d\vec{r}\rangle+C,$$

де $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – фіксована точка поля, а $M(x,y,z)$ – змінна точка, інтегрування відбувається вздовж будь-якої кривої, що сполучає ці точки.

Зокрема, якщо обрати шлях інтегрування у вигляді ламаної, ланки якої паралельні осям координат, то отримаємо

$$u(x,y,z)=\int\limits_{M_0M}\langle\vec{a},d\vec{r}\rangle+C=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)d\,x+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)d\,y+\int\limits_{z_0}^{z}R(x,y,z)d\,z+C.$$

Прикладом потенціального поля є поле тяжіння.

Соленоїдальне поле

Означення. Векторне поле $\vec{a}(x,y,z)$, визначене в області G, називається *соленоїдальним* або *трубчатим*, якщо існує векторна величина $\vec{b}(x,y,z)$, для якої $\vec{a}$ являється ротором:

$$\vec{a}=\operatorname{rot}\vec{b}=[\nabla,\vec{a}].$$

Вектор $\vec{b}$ називають векторним потенціалом поля $\vec{a}$.

Теорема. Для того щоб поле $\vec{a}$ було соленоїдальним необхідно і достатньо, щоб у всій області G виконувалась рівність

$$\operatorname{div}\vec{a}=0.$$

Прикладом соленоїдального поля є швидкість течії рідини.

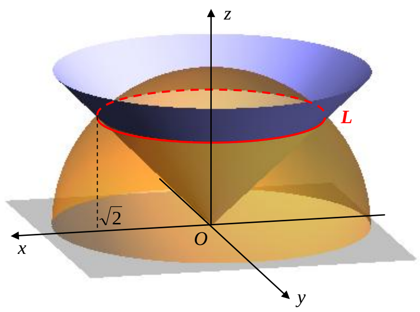
Приклад 3. Знайдіть циркуляцію векторного поля

$$\vec{a}=(z^2-x^2)\vec{i}+(x^2-y^2)\vec{j}+(y^2-z^2)\vec{k}$$

по контуру $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ x^2+y^2=z^2.\end{cases}$

Розв'язання.

Контуром інтегрування L буде коло $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ z=\sqrt{2},\end{cases}$ отримане при перетині сфери $x^2+y^2+z^2=4$ і конуса $x^2+y^2=z^2$.



Обчислимо циркуляцію векторного поля за формулою Стокса.

$$Ц=\oint\limits_{L}(z^2-x^2)dx+(x^2-y^2)dy+(y^2-z^2)dz=$$

$$\iint\limits_{\sigma}\begin{vmatrix}dydz & dxdz & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z^2-x^2 & x^2-y^2 & y^2-z^2\end{vmatrix}==\iint\limits_{\sigma}2ydydz+2zdxdz+2xdxdy.$$

В якості поверхні σ, для якої L буде межею виберемо круг S, для якого $z=\sqrt{2},\ x^2+y^2=2$. За нормаль $\vec{n}^0$ приймемо одиничний вектор $\vec{k}$, направлений по осі Oz, тобто $\vec{n}^0=\vec{k}$. Тоді:

$$\iint\limits_{\sigma}2ydydz+2zdxdz+2xdxdy=2\iint\limits_{D_{xy}}xdxdy=2\int\limits_{0}^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_{0}^{\sqrt{2}}\rho^2d\rho=0.$$

Приклад 2. Переконайтеся, що векторне поле

$$\vec{a}=2xy^2\vec{i}+(2x^2y+3z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$$

потенціальне та знайдіть його потенціал.

Розв'язання.

Знайдемо ротор вектора $\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^2 & 2x^2y+3z & 3y+2z \end{vmatrix} = (0,0,0).$$

Умова потенціальності поля виконується, отже поле $\vec{a}$ потенціальне. Тоді, обираючи в якості точки M_0 точку $(0,0,0)$, отримаємо потенціал

$$u(x,y,z) = \int_0^x 2\mathrm{x}\cdot 0^2 d\,\mathrm{x} + \int_0^y (2x^2\,\mathrm{y} + 3\cdot 0)d\,\mathrm{y} + \int_0^z (3y+2\mathrm{z})d\,\mathrm{z} + C =$$

$$= 0 + x^2\,\mathrm{y}^2\Big|_0^y + (3y\,\mathrm{z} + \mathrm{z}^2)\Big|_0^z + C = x^2y^2 + 3y\mathrm{z} + z^2 + C.$$

Циркуляція і ротор

Нехай в області G задано векторне поле

$$\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

а L – гладка або кусково-гладка замкнена крива, розташована в цій області.

Означення. Криволінійний інтеграл

$$\oint_L \langle \vec{a}, d\vec{r} \rangle = \oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

де $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, називається *циркуляцією* векторного поля $\vec{a}(x,y,z)$ вздовж кривої L.

Циркуляція залежить від вибору напряму на кривій L.

Зауваження. Якщо $\vec{a}$ силове поле, то циркуляція виражає роботу сили $\vec{a}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж шляху L. Для полів іншої природи циркуляція має інший фізичний зміст.

Означення. Вектор, який визначається рівністю

$$\operatorname{rot}\vec{a}(x,y,z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

або символічною формулою

$$\operatorname{rot}\vec{a}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = [\nabla, \vec{a}],$$

називають *ротором* або *вихором* вектора $\vec{a}(x,y,z)$.

Формула Стокса у векторній формі має вигляд

$$\oint_L \langle \vec{a}, d\vec{r} \rangle = \iint_\sigma \langle \operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n}^0 \rangle dS$$

і означає наступне: циркуляція векторного поля $\vec{a}$ по довільному кусково-гладкому замкненому контуру L дорівнює потоку вектора $\operatorname{rot}\vec{a}$ через поверхню S, обмежену цим контуром.

Потенціальне поле

Означення. Векторне поле $\vec{a}(x,y,z)$, визначене в області G, називається *потенціальним*, якщо існує скалярна величина $u(x,y,z)$, для якої $\vec{a}$ являється градієнтом:

$$\vec{a} = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \nabla u,$$

тобто

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y},\ R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Або іншими словами, якщо вираз $Pdx+Qdy+Rdz$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y, z)$.

Функцію u називають потенціальною функцією векторного поля $\vec{a}$.

Теорема. Для того щоб поле $\vec{a}$ було потенціальним необхідно і достатньо, щоб у всій області G виконувалась рівність

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}.$$

Якщо поле $\vec{a}$ потенціальне, то його циркуляція по довільному простому замкненому контуру дорівнює нулю, а криволінійний інтеграл

$$\int_{AB}\langle\vec{a}, d\vec{r}\rangle$$

залежить лише від положення початкової A та кінцевої B точок інтегрування і не залежить від форми кривої AB.

Потенціальну функцію вектора $\vec{a}$ можна знайти за формулою

$$u(x,y,z)=\int_{M_0M}\langle\vec{a}, d\vec{r}\rangle+C,$$

де $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – фіксована точка поля, а $M(x,y,z)$ – змінна точка, інтегрування відбувається вздовж будь-якої кривої, що сполучає ці точки.

Зокрема, якщо обрати шлях інтегрування у вигляді ламаної, ланки якої паралельні осям координат, то отримаємо

$$u(x,y,z)=\int_{M_0M}\langle\vec{a},d\vec{r}\rangle+C=\int_{x_0}^{x}P(\mathrm{x},y_0,\mathrm{z}_0)d\,\mathrm{x}+\int_{y_0}^{y}Q(x,\mathrm{y},z_0)d\,\mathrm{y}+\int_{z_0}^{z}R(x,y,\mathrm{z})d\,\mathrm{z}+C.$$

Прикладом потенціального поля є поле тяжіння.

Соленоїдальне поле

Означення. Векторне поле $\vec{a}(x, y, z)$, визначене в області G, називається *соленоїдальним* або *трубчатим*, якщо існує векторна величина $\vec{b}(x, y, z)$, для якої $\vec{a}$ являється ротором:

$$\vec{a}=\operatorname{rot}\vec{b}=[\nabla,\vec{a}].$$

Вектор $\vec{b}$ називають векторним потенціалом поля $\vec{a}$.

Теорема. Для того щоб поле $\vec{a}$ було соленоїдальним необхідно і достатньо, щоб у всій області G виконувалась рівність

$$\operatorname{div}\vec{a}=0.$$

Прикладом соленоїдального поля є швидкість течії рідини.