Тема: Диференціальні рівняння

1. Основні поняття і означення.
2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
3. Однорідні диференціальні рівняння.
4. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі.
5. Диференціальні рівняння вищих порядків,які допускають пониження порядку.
6. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.
7. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.
8. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною

1.Основні поняття і означення.

Диференціальними називаються рівняння, які пов'язують між собою незалежну змінну, шукану функцію і похідні або диференціали цієї функції.

Якщо невідома функція є функцією однієї змінної, то диференціальне рівняння називається *звичайним*. Надалі розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної, яка входить в дане рівняння.

Диференціальне рівняння n-го порядку, не розв'язане відносно найвищої похідної, в загальному вигляді подається так

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (1)$$

Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно найвищої похідної, то воно має вигляд

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right). \qquad (2)$$

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (3)$$

або

$$y' = f(x, y). \qquad (4)$$

Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то рівняння (4) можна записати у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, або $dy = f(x, y)dx$. Якщо функція $f(x, y)$ є дробом $f(x, y) = -\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$, то рівняння (4) можна переписати у *симетричній формі*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння (4) в області D називається функція $y = \varphi(x, C)$, яка в результаті підстановки в диференціальне рівняння перетворює його на тотожність по x при будь-яких допустимих значеннях сталої C.

Процес знаходження розв'язку називається інтегруванням диференціального рівняння.

<u>*Частинним*</u> називається будь-який розв'язок $y=\varphi(x, C_0)$, який одержується із загального розв'язку при певному значенні сталої $C=C_0$.

<u>*Задачею Коші*</u> називається задача знаходження частинного розв'язку $y=\varphi(x)$ диференціального рівняння (4), що задовольняє умову $y(x_0)=y_0$. Умова $y(x_0)=y_0$ називається початковою умовою диференціального рівняння.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається <u>*інтегральною кривою*</u> цього рівняння.

Теорема. Якщо функція $f(x, y)$ і її похідна f'_y неперервні в області D, то розв'язок диференціального рівняння (4) з початковою умовою $y(x_0)=y_0$ існує і єдиний.

Точки, в яких не виконуються умови теореми, називаються особливими. <u>*Розв'язок*</u> диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають <u>*особливим*</u> розв'язком. Графік особливого розв'язку називають <u>*особливою інтегральною кривою*</u>.

2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Рівняння виду

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0 \qquad (5)$$

називається диференціальним рівнянням з <u>*відокремлюваними змінними*</u>, якщо функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ можна подати у вигляді

$$M(x, y)=M_1(x)\cdot N_1(y), \quad N(x, y)=M_2(x)\cdot N_2(y).$$

Аналогічно рівняння виду $y'=f(x, y)$, де $f(x, y)=M(x)\cdot N(y)$, є <u>*диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*</u>.

Рівняння (5) розв'язується шляхом відокремлення змінних. За допомогою алгебраїчних перетворень необхідно досягти того, щоб біля dx множником була функція, яка залежить тільки від змінної x, а біля dy – функція, яка залежить тільки від змінної y.

Подамо рівняння (5) у вигляді

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0. \qquad (6)$$

Для відокремлення змінних поділимо рівняння (6) на функцію $N_1(y)M_2(x)$ і дістанемо <u>*диференціальне рівняння з відокремленими змінними*</u>

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0,$$

яке має інтеграл

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C,\ C=const,$$

або

$$\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + C.$$

Диференціальне рівняння (5) також має розв'язки $y = y_j$, $x = x_i$, де $y = y_j$ є коренем рівняння $N_1(y) = 0$, а $x = x_i$ є коренем рівняння $M_2(x) = 0$ (особливі розв'язки).

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння $xy(1+x^2)y' = 1+y^2$.

Розв'язання.

Так як $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то $xy(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = 1+y^2$.

Помножимо обидві частини рівняння на dx: $xy(1+x^2)dy = (1+y^2)dx$.

Відокремимо змінні поділивши обидві частини рівняння на функцію $x(1+x^2)(1+y^2)$:

$$\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{dx}{x(1+x^2)} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{dx}{x(1+x^2)}.$$

Знайдемо кожен інтеграл окремо та результати прирівняємо:

а) $\displaystyle \int \frac{y}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+1)}{1+y^2} = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \ln|C_1|$

(тут сталу інтегрування записано у логарифмічній формі для зручності)

б) $\displaystyle \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{1+x^2} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + \ln|C_2|$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow A(x^2+1) + (Bx+C)x = 1 \Rightarrow A = 1, B = -1, C = 0$$

в) $\displaystyle \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \ln|C_1| = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|C_2| \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \ln(y^2+1) = \ln\frac{x^2}{x^2+1} + \ln C^2 \quad \left(\text{тут } \ln C^2 = 2\ln|C_2| - 2\ln|C_1| = \ln\frac{C_2^2}{C_1^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y^2 + 1 = \frac{C^2x^2}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{C^2x^2}{x^2+1} - 1}$$ – загальний розв'язок.

3. Однорідні диференціальні рівняння.

Рівняння виду

$$y' = f(x,y) \tag{7}$$

називається <u>*однорідним*</u> диференціальним рівнянням, якщо функція $f(x,y)$ – однорідна.

Функція $f(x,y)$ називається *однорідною*, якщо при множенні аргументів на довільний параметр $t \neq 0$ значення функції не змінюється, тобто $f(x,y) = f(tx,ty)$.

Наприклад: $f\left(x,y\right) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $f\left(tx,ty\right) = \dfrac{t^2xy}{t^2\left(x^2+y^2\right)} = \dfrac{xy}{x^2+y^2} = f\left(x,y\right)$.

Рівняння (7) за допомогою підстановки $y = ux$, де $u = u(x)$ (8), і відповідно $y' = x\dfrac{du}{dx} + u$, зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

П р и к л а д 2. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$xy' = \frac{xy - y^2}{2y - 2x}.$$

Розв'язання.

Зведемо задане рівняння до виду (7), тобто поділимо його обидві частини на x: $y' = \dfrac{xy - y^2}{2xy - 2x^2}$.

Так як права частина рівняння – однорідна функція, то це рівняння однорідне і інтегрується заміною (8): $y = ux$, $y' = x\dfrac{du}{dx} + u$.

Маємо: $x\dfrac{du}{dx} + u = \dfrac{x(ux) - (ux)^2}{2x(ux) - 2x^2} \Rightarrow x\dfrac{du}{dx} + u = \dfrac{ux^2 - u^2x^2}{2ux^2 - 2x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\dfrac{du}{dx} + u = \dfrac{u - u^2}{2u - 2} \Rightarrow x\dfrac{du}{dx} + u = -\dfrac{1}{2}u \Rightarrow x\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{3}{2}u \Rightarrow$

$\dfrac{du}{u} = -\dfrac{3}{2}\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \displaystyle\int\frac{du}{u} = -\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| = -\dfrac{3}{2}\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow$

$\Rightarrow u = \dfrac{C}{x\sqrt{x}} \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{C}{x\sqrt{x}} \Rightarrow y = \dfrac{C}{\sqrt{x}}.$

4. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі.

Рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{9}$$

де $p(x)$, $q(x)$ відомі функції, називається *лінійним* диференціальним рівнянням.

Якщо $q(x) \equiv 0$, то рівняння (9) називається *однорідним*. Якщо $q(x) \neq 0$, то рівняння (9) називається *неоднорідним*.

Розв'язок рівняння (9) будемо шукати у вигляді добутку двох функцій $u = u(x)$ та $v = v(x)$ (метод Бернуллі). Підставляючи

$$y = uv,\ \ y' = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \tag{10}$$

у рівняння (9), дістанемо рівняння

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + p(x)uv = q(x). \tag{11}$$

В лівій частині рівняння (11) винесемо v за дужки:

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + p(x)u\right) = q(x). \tag{12}$$

Так як одну з функцій можна вибирати довільно, то виберемо таку функцію u, щоб вираз у дужках дорівнював нулю:

$$\frac{du}{dx} + p(x)u = 0.$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язавши його, знайдемо функцію $u = u(x)$ (обираємо найпростіший відмінний від нуля частинний розв'язок).

Підставивши знайдену функцію $u(x)$ у рівняння (12), знову одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u(x)\cdot\frac{dv}{dx} = q(x).$$

Розв'язавши його, отримаємо функцію $v = v(x, C)$. Тоді

$$y = u(x)\cdot v(x, C).$$

П р и к л а д 3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2},\ \ y(0) = \frac{2}{3}.$$

Розв'язання.

Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння. Так як дане диференціальне рівняння – лінійне, то вводимо заміну (10)

$$y = uv,\ \ y' = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Отримаємо:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + \frac{2xuv}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + \frac{2xu}{1+x^2}\right) = \frac{2x^2}{1+x^2}. \tag{13}$$

Прирівнюємо вираз в дужках до нуля і знайдемо функцію $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} + \frac{2xu}{1+x^2} = 0 \ \Rightarrow\ \int\frac{du}{u} = -\int\frac{2x}{1+x^2}dx \ \Rightarrow\ \ln|u| = -\ln(x^2+1) \ \Rightarrow\ u = \frac{1}{x^2+1}.$$

Підставляємо знайдену функцію $u(x)$ в рівняння (13) і знайдемо функцію $v(x)$:

$$\frac{1}{x^2+1}\frac{dv}{dx} = \frac{2x^2}{1+x^2} \ \Rightarrow\ dv = 2x^2dx \ \Rightarrow\ v = \int 2x^2dx = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння такий

$$y = uv = \frac{1}{x^2+1}\left(\frac{2}{3}x^3 + C\right).$$

Для знаходження частинного розв'язку підставимо задані значення змінних $x = 0,\ y = \frac{2}{3}$ (початкові умови) в знайдений загальний розв'язок рівняння, звідки знайдемо значення довільної сталої *C*:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{0^2+1}\left(\frac{2}{3}\cdot 0^3 + C\right) \ \Rightarrow\ C = \frac{2}{3}.$$

Значення сталої *C* підставляємо у загальний розв'язок рівняння і записуємо шуканий частинний розв'язок: $y = \frac{1}{x^2+1}\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}\right).$

Рівняння Бернуллі.

Диференціальні рівняння виду $y' + p(x)y = q(x)y^n,\ n \in R,\ n \neq 0,\ n \neq 1$ (14) називається рівнянням Бернуллі.

Розв'язок рівняння (14) шукають, як і розв'язок лінійного диференціального рівняння, використовуючи метод Бернуллі (10) : $y = u \cdot v$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' + \frac{y}{x} = \ln x \cdot y^2.$$

Розв'язання.

Задане рівняння є рівнянням Бернуллі, тому використаємо заміну (10)

$$y = uv,\ y' = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + \frac{uv}{x} = \ln x \cdot u^2v^2 \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right) = \ln x \cdot u^2v^2. \tag{15}$$

Прирівнюємо вираз в дужках до нуля і знайдемо функцію $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0 \ \Rightarrow\ \int\frac{du}{u} = -\int\frac{dx}{x} \ \Rightarrow\ \ln|u| = -\ln x \ \Rightarrow\ u = \frac{1}{x}.$$

Підставляємо знайдену функцію $u(x)$ в рівняння (15) і знайдемо функцію $v(x)$:

$$\frac{1}{x}\frac{dv}{dx} = \ln x \cdot \frac{1}{x^2}\cdot v^2 \ \Rightarrow\ \frac{dv}{v^2} = \frac{\ln x}{x}dx \ \Rightarrow\ \int\frac{dv}{v^2} = \int\frac{\ln x}{x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v} = \frac{\ln^2 x}{2} + C \Rightarrow v = -\frac{2}{\ln^2 x + 2C}.$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y = \frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{2}{\ln^2 x + 2C}\right) = -\frac{2}{x(\ln^2 x + 2C)}.$$

Отже загальний розв'язок заданого диференціального рівняння такий:

$$y = -\frac{2}{x(\ln^2 x + 2C)}.$$

5.Диференціальні рівняння вищих порядків,які допускають пониження порядку.

Диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$F(x, y, y', y'') = 0, \qquad (16)$$

третього порядку –

$$F(x, y, y', y'', y''') = 0. \qquad (17)$$

Загальний розв’язок рівняння (16) містить дві довільні сталі C_1 та C_2 і має вигляд $y = \varphi(x, C_1, C_2)$. За рахунок вибору довільних сталих C_1 та C_2 можна розв’язати задачу Коші, яка полягає в знаходженні частинного розв’язку $y = y(x)$, що задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Аналогічно, загальний розв’язок рівняння (17) містить три довільні сталі C_1 , C_2 та C_3 і має вигляд $y = \varphi(x, C_1, C_2, C_3)$.

Розглянемо деякі випадки, коли можна <u>понизити порядок диференціального рівняння</u> (16) і звести його до диференціального рівняння першого порядку.

1) Якщо до запису рівняння не входить невідома функція y, тобто $F(x, y', y'') = 0$, то можна понизити порядок рівняння, узявши $y' = z$, $y'' = z'$, де $z = z(x)$ – функція, яка залежить від змінної x. При цьому дістанемо диференціальне рівняння першого порядку $F(x, z, z') = 0$. Якщо буде знайдено загальний розв’язок цього рівняння $z = z(x, C_1)$, то знайдемо і розв’язок диференціального рівняння (16):

$$y = \int z(x, C_1)dx + C_2.$$

2) Якщо до запису рівняння не входить незалежна змінна x, тобто $F(y, y', y'') = 0$, то можна понизити порядок рівняння, якщо за нову незалежну змінну взяти y, а за шукану залежну змінну $z = y'$, де $z = z(y)$ – функція, яка залежить від змінної y. Таким чином:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z.$$

Початкове диференціальне рівняння другого порядку зводиться до диференціального рівняння першого порядку $F\left(y,\ z,\ z\frac{dz}{dy}\right) = 0$. Якщо буде знайдено загальний розв’язок цього рівняння $z = z(y, C_1)$, то для відшукання загального розв’язку початкового диференціального рівняння дістанемо рівняння:

$$y' = z(y, C_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z(y, C_1) \Rightarrow \int \frac{dy}{z(y, C_1)} = x + C_2.$$

П р и к л а д 5. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1) $y'' + y' tgx = \sin 2x$;

2) $(x+1)y''' + y'' = x + 1$.

Розв'язання.

1) $y''+y'tgx=\sin 2x$.

До запису рівняння не входить невідома функція y (перший випадок), значить, робимо заміну $y'=z,\ y''=z'=\frac{dz}{dx}$. Одержуємо:

$$z'+ztgx=\sin 2x$$

– лінійне диференціальне рівняння першого порядку, яке розв'язується заміною $z=uv,\quad z'=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$.

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+uvtgx=\sin 2x \ \Rightarrow\ u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+utgx\right)=\sin 2x \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{du}{dx}+utgx=0 \Rightarrow \int\frac{du}{u}=-\int tgxdx \ \Rightarrow\ \ln|u|=\ln|\cos x| \Rightarrow\ u=\cos x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos x\frac{dv}{dx}=\sin 2x\ \Rightarrow\ v=\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx=2\int\sin xdx=-2\cos x+C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ z=uv=\cos x(-2\cos x+C_1)$$

Знайшовши значення z, повертаємось до заміни :

$$y'=z=\cos x(-2\cos x+C_1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y=\int\cos x(-2\cos x+C_1)dx=-2\int\cos^2 xdx+C_1\int\cos xdx=$$

$$=-x-\frac{1}{2}\sin 2x+C_1\sin x+C_2$$

2) $(x+1)y'''+y''=x+1$

– диференціальне рівняння третього порядку, до запису якого не входить невідома функція y (перший випадок) і її перша похідна y', значить замінюємо найнижчу похідну, яка є в заданому рівнянні

$$y''=z,\ \ y'''=z'=\frac{dz}{dx}.$$

Одержуємо: $(x+1)z'+z=x+1$ – лінійне диференціальне рівняння першого порядку, яке розв'язується заміною $z=uv,\quad z'=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$.

$$(x+1)\left(u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\right)+uv=x+1\ \Rightarrow\ u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+\frac{u}{x+1}\right)=1\ \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{u}{x+1}=0\ \Rightarrow\ \int\frac{du}{u}=-\int\frac{dx}{x+1}\ \Rightarrow\ \ln|u|=-\ln|x+1|\ \Rightarrow\ u=\frac{1}{x+1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x+1}\frac{dv}{dx}=1\Rightarrow\ v=\int(x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+C_1\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ z=uv=\frac{1}{x+1}\left(\frac{x^2}{2}+x+C_1\right)$$

Повертаємось до заміни :

$$y'' = z \Rightarrow y' = \int z dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y' = \int \frac{1}{x+1}\left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right)dx = \int\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2(x+1)} + \frac{C_1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C_1\ln|x+1| + C_2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \left(C_1 - \frac{1}{2}\right)\ln|x+1| + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \int\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \left(C_1 - \frac{1}{2}\right)\ln|x+1| + C_2\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + \left(C_1 - \frac{1}{2}\right)\left((x+1)\ln|x+1| - x\right) + C_2 x + C_3.$$

6. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad p \text{ і } q - \text{ сталі,} \tag{18}$$

називається <u>*лінійним однорідним*</u> диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Загальний розв’язок рівняння (16) має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{19}$$

де y_1 і y_2 – два лінійно незалежних частинних розв’язки рівняння (18), C_1 та C_2 – довільні сталі.

Ці розв’язки знаходять у вигляді $y = e^{kx}$, де k – невизначена стала (дійсна або уявна). Для знаходження k складають характеристичне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{20}$$

Розв’язуючи рівняння (20), знаходимо його корені k_1 і k_2. Можливі такі три випадки.

1. Якщо $D > 0$, то $k_1 \neq k_2$ – дійсні числа, тоді $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$, а загальний розв’язок має вигляд
$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{21}$$
2. Якщо $D = 0$, то $k_1 = k_2 = k$ – дійсне число, тоді $y_1 = e^{kx}$ та $y_2 = xe^{kx}$, а загальний розв’язок має вигляд
$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}. \tag{22}$$
3. Якщо $D < 0$, то k_1 та k_2 – комплексні числа ($k_1 = \alpha + \beta i$ і $k_2 = \alpha - \beta i,\ \beta \neq 0$), тоді $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, а загальний розв’язок має вигляд
$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{23}$$

Приклад 6. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$;

2) $y'' + 4y' + 13y = 0$;

3) $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання.

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 6 = 0$. Знайдемо його розв'язки: $D = 25 - 24 = 1 \Rightarrow k_1 = \frac{5+1}{2} = 3, k_2 = \frac{5-1}{2} = 2$. Тоді, використовуючи формулу (21) маємо, що загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

2) $y'' + 4y' + 13y = 0$. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 4k + 13 = 0$. Знайдемо його розв'язки:

$$D = 16 - 52 = -36 \Rightarrow k_1 = \frac{-4+6i}{2} = -2 + 3i,\ k_2 = \frac{-4-6i}{2} = -2 - 3i.$$

Тоді, використовуючи формулу (23) маємо, що загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = C_1 e^{-2x}\cos 3x + C_2 e^{-2x}\sin 3x$.

3) $y'' + 6y' + 9y = 0$. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його розв'язки : $k^2 + 6k + 9 = 0 \Rightarrow (k+3)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = -3, k_2 = -3$. Тоді, використовуючи формулу (22) маємо, що загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$.

7.Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{24}$$

де p і q – сталі, а $f(x)$ – деяка неперервна функція на відрізку $[a;b]$, називається <u>*лінійним неоднорідним*</u> диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Рівняння $y'' + py' + qy = 0$ у цьому випадку називається <u>*відповідним лінійним однорідним диференціальним рівнянням*</u>.

Загальний розв'язок рівняння (24) знаходять у вигляді суми загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння та деякого частинного розв'язку неоднорідного рівняння, тобто

$$y = \overline{y} + y^*, \tag{25}$$

де $\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння, а y^* – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння знаходяться за формулами (21-23). Щоб знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння використовують <u>*метод варіації довільних сталих*</u>, який дає змогу визначити частинний розв'язок неоднорідного рівняння за загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння.

Нехай $\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння. Замінимо C_1 і C_2 невідомими функціями $C_1(x)$ і $C_2(x)$ та підберемо їх такими, щоб функція

$$y^* = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \tag{26}$$

була частинним розв'язком неоднорідного диференціального рівняння. Для визначення невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1{}'(x) y_1 + C_2{}'(x) y_2 = 0, \\ C_1{}'(x) y_1' + C_2{}'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

Теорема: Якщо функції y_1 і y_2 лінійно незалежні розв'язки однорідного диференціального рівняння на проміжку $(a;b)$, то визначник $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ в кожній точці даного проміжку.

Визначник системи $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$, тому що y_1 і y_2- лінійно незалежні частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння. Отже, дана система має єдиний розв'язок: $C_1'(x) = \varphi(x)$, $C_2'(x) = \psi(x)$. Проінтегрувавши дані функції знайдемо $C_1(x) = \int \varphi(x) dx$ і $C_2(x) = \int \psi(x) dx$, а потім підставивши їх у формулу (26) отримаємо частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y^* = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 = \int \varphi(x) dx \cdot y_1 + \int \psi(x) dx \cdot y_2 .$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x} .$$

Розв'язання.

Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд: $y = \overline{y} + y^*$.

Знайдемо $\bar{y}$. Для цього випишемо відповідне однорідне рівняння та розв'яжемо його.

$$y'' + 4y = 0;\ k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow \bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x .$$

Запишемо частинний розвязок даного неоднорідного рівняння у вигляді

$$y^* = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x .$$

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ складемо систему

$$\begin{cases} C_1{}'(x) \cos 2x + C_2{}'(x) \sin 2x = 0, \\ -2C_1{}'(x) \sin 2x + C_2{}'(x) \cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases}$$

Розв’язавши дану систему отримаємо: $C_1'(x) = -\frac{1}{2}tgx$ і $C_2'(x) = \frac{1}{2}$. Тоді $C_1(x) = -\int\frac{1}{2}tgxdx = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|$, а $C_2(x) = \int\frac{1}{2}dx = \frac{x}{2}$. Запишемо частинний розв’язок неоднорідного рівняння: $y^* = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\cdot\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$.

Загальний розв’язок заданого неоднорідного диференціального рівняння буде таким:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\cdot\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$$

8.Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною

Якщо права частина рівняння (24) має спеціальний вигляд, то частинний розв’язок $y*$ можна знаходити, не вдаючись до інтегрування. Розглянемо деякі з таких випадків.

1) Нехай права частина рівняння (24) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}P_n(x), \tag{27}$$

де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня n.

Тоді частинний розв’язок цього рівняння шукають у вигляді

$$y* = x^r e^{\alpha x}Q_n(x), \tag{28}$$

де $Q_n(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами того самого степеня, що і многочлен $P_n(x)$;

r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють α, якщо α не є коренем характеристичного рівняння, то приймають $r = 0$.

2) Нехай права частина рівняння (24) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x). \tag{29}$$

Функція (27) є частинним випадком функції (29) при $\beta = 0$.

Тоді частинний розв’язок цього рівняння шукають у вигляді

$$y* = x^r e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x + L_s(x)\sin\beta x), \tag{30}$$

де $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами;

s – найвищий степінь многочленів $P_n(x)$ та $R_m(x)$;

r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha + \beta i$.

Шукані многочлени $Q_n(x)$ з формули (26) та $Q_s(x)$ і $L_s(x)$ з формули (29) мають бути повними, тобто містити всі степені x відповідно від 0 до n та від 0 до s.

П р и к л а д 8. Знайти розв’язок задачі Коші:

1) $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

2) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x};\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

3) $y''+2y'+2y=x^2e^{-x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Розв'язання.

1) $y''-3y'-4y=17\sin x$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Дане рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням з сталими коефіцієнтами. Знайдемо розв'язок характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння.

$$k^2-3k-4=0 \Rightarrow k_1=-1,\ k_2=4.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тоді за формулою (21) загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння такий

$$\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок y^* даного неоднорідного рівняння. Функція у правій частині даного рівняння $f(x)=17\sin x$ – подана у вигляді (28), тобто $f(x)=e^{0x}(0\cdot\cos x+17\sin x)$. Тому розв'язок шукатимемо у вигляді (29)

$$y^*=x^re^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x+L_s(x)\sin\beta x),$$

де $\alpha=0, \beta=1 \Rightarrow \alpha+\beta i=i$;

$r=0$, так як $\alpha+\beta i\neq k_1$ і $\alpha+\beta i\neq k_2$;

$s=0$, так як $P_n(x)=0, R_m(x)=17 \Rightarrow n=m=0$, тому $Q_0(x)=A,\ L_0(x)=B$.

Звідси:

$$y^*=x^0e^0(A\cos x+B\sin x)=A\cos x+B\sin x,$$

$$(y^*)'=-A\sin x+B\cos x,$$

$$(y^*)''=-A\cos x-B\sin x.$$

Підставляємо у задане рівняння:

$$y''=(y^*)'',\ y'=(y^*)',\ y=y^*.$$

$$-A\cos x-B\sin x-3(-A\sin x+B\cos x)-4(A\cos x+B\sin x)=17\sin x.$$

Розкриємо дужки та згрупуємо доданки у лівій частині відносно $\cos x$ та $\sin x$:

$$(-5A-3B)\cos x+(3A-5B)\sin x=17\sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля $\cos x$ та $\sin x$, одержимо

$$\begin{cases}-5A-3B=0,\\ 3A-5B=17;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-\dfrac{3}{5}B,\\ -\dfrac{9}{5}B-5B=17;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=\dfrac{3}{2},\\ B=-\dfrac{5}{2}.\end{cases}$$

Звідси $y^*=\dfrac{3}{2}\cos x-\dfrac{5}{2}\sin x$.

Таким чином, знайшовши загальний розв'язок $\overline{y}$ відповідного однорідного та частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння, можемо записати загальний розв'язок даного рівняння

$$y=\overline{y}+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}+\frac{3}{2}\cos x-\frac{5}{2}\sin x.$$

Розв'яжемо задачу Коші при $y(0)=0,\ \ y'(0)=1.$ Для цього знайдемо y':

$$y' = -C_1e^{-x} + 4C_2e^{4x} - \frac{3}{2}\sin x - \frac{5}{2}\cos x.$$

Підставивши початкові умови, одержимо

$$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{3}{2} = 0 \ \Rightarrow\ C_1 + C_2 = -\frac{3}{2},$$

$$y'(0) = -C_1 + 4C_2 - \frac{5}{2} = 1 \ \Rightarrow\ C_1 = 4C_2 - \frac{7}{2}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = -\dfrac{3}{2}, \\ C_1 = 4C_2 - \dfrac{7}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \dfrac{2}{5}, \\ C_1 = -\dfrac{19}{10}. \end{cases}$$

Таким чином, отримаємо відповідь:

$$y = \bar{y} + y^* = -\frac{19}{10}e^{-x} + \frac{2}{5}e^{4x} + \frac{3}{2}\cos x - \frac{5}{2}\sin x.$$

2) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x};\ y(0)=0,\ \ y'(0)=1.$

Дане рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами.

Знайдемо розв'язок характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння.

$$k^2 - 8k + 16 = 0 \ \Rightarrow\ k_1 = k_2 = 4 \ \Rightarrow\ k = 4.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тоді за формулою $y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$ загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння такий

$$\bar{y} = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок y^* даного неоднорідного рівняння. Функція у правій частині даного рівняння $f(x) = e^{4x}$ – подана у вигляді (26), причому $P_n(x) = 1$ – многочлен нульового порядку, тобто $n = 0$. Тому розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x),$$

де $\alpha = 4$;
$r = 2$, так як $\alpha = k_1$ і $\alpha = k_2$;
$n = 0$ (порядок многочлена $P_n(x)$), тому $Q_0(x) = A$.

Звідси

$y^* = Ax^2e^{4x}$,

$(y^*)' = 2Axe^{4x} + 4Ax^2e^{4x}$, Пі

$(y^*)'' = 2Ae^{4x} + 8Axe^{4x} + 8Axe^{4x} + 16Ax^2e^{4x} = 2Ae^{4x} + 16Axe^{4x} + 16Ax^2e^{4x}.$

дставляємо у задане рівняння : $y'' = (y^*)'',\ y' = (y^*)',\ y = y^*.$

$$2Ae^{4x}+16Axe^{4x}+16Ax^2e^{4x}-8(2Axe^{4x}+4Ax^2e^{4x})+16(Ax^2e^{4x})=e^{4x},$$
$$e^{4x}(2A+16Ax+16Ax^2-16Ax-32Ax^2+16Ax^2)=e^{4x},$$
$$2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}.$$

Звідси $y^*=\frac{1}{2}x^2e^{4x}$. Таким чином, знайшовши загальний розв'язок $\overline{y}$ відповідного однорідного та частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння, можемо записати загальний розв'язок даного рівняння
$$y=\overline{y}+y^*=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}+\frac{1}{2}x^2e^{4x}.$$
Знайдемо розв'язок задачі Коші при початкових умовах $y(0)=0,\ y'(0)=1$.
$$y'=4C_1e^{4x}+C_2e^{4x}+4C_2xe^{4x}+xe^{4x}+2x^2e^{4x}=$$
$$=e^{4x}(4C_1+C_2+(4C_2+1)x+2x^2).$$
Підставивши початкові умови, одержимо
$$y(0)=C_1=0,$$
$$y'(0)=4C_1+C_2=1 \Rightarrow C_2=1.$$

Таким чином, дістанемо відповідь:
$$y=xe^{4x}+\frac{1}{2}x^2e^{4x}=(x+\frac{1}{2}x^2)e^{4x}.$$

3) $y''+2y'+2y=x^2e^{-x};\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1.$

Дане рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами.

Знайдемо розв'язок характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння.
$$k^2+2k+2=0 \Rightarrow D=4-8=-4=(2i)^2 \Rightarrow k_1=-1-i,\ k_2=-1+i.$$
Корені характеристичного рівняння комплексні ($\alpha=-1,\ \beta=1$), тоді за формулою $y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$ (21) загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння такий
$$\overline{y}=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\sin x=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$
Знайдемо частинний розв'язок y^* даного неоднорідного рівняння. Функція у правій частині даного рівняння $f(x)=x^2e^{-x}$ – подана у вигляді (26), причому $P_n(x)=x^2$ – многочлен другого порядку, тобто $n=2$. Тому розв'язок шукатимемо у вигляді
$$y^*=x^re^{\alpha x}Q_n(x),$$
де $\alpha=-1$;
$r=0$, так як $\alpha\neq k_1$ і $\alpha\neq k_2$;

$n=2$ (порядок многочлена $P_n(x)$), тому $Q_2(x)=Ax^2+Bx+C$ (повний многочлен другого порядку).

Звідси

$$y^*=x^0e^{-x}(Ax^2+Bx+C)=e^{-x}(Ax^2+Bx+C),$$

$$(y^*)'=-e^{-x}(Ax^2+Bx+C)+e^{-x}(2Ax+B)=e^{-x}(-Ax^2+(2A-B)x+B-C),$$

$$(y^*)''=-e^{-x}(-Ax^2+(2A-B)x+B-C)+e^{-x}(-2Ax+2A-B)=$$
$$=e^{-x}(Ax^2+(-4A+B)x+2A-2B+C).$$

Підставляємо у задане рівняння : $y''=(y^*)''$, $y'=(y^*)'$, $y=y^*$.

$$e^{-x}(Ax^2+(-4A+B)x+2A-2B+C)+2e^{-x}(-Ax^2+(2A-B)x+B-C)+$$
$$+2e^{-x}(Ax^2+Bx+C)=x^2e^{-x},$$

$$e^{-x}(Ax^2+Bx+2A+C)=x^2e^{-x},$$

$$Ax^2+Bx+2A+C=x^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля відповідних степенів x одержуємо:

$$\begin{cases} A=1, \\ B=0, \\ 2A+C=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=0, \\ C=-2. \end{cases}$$

Звідси $y^*=e^{-x}(x^2-2)$. Таким чином, знайшовши загальний розв’язок $\overline{y}$ відповідного однорідного та частинний розв’язок y^* неоднорідного рівняння, можемо записати загальний розв’язок даного рівняння

$$y=\overline{y}+y^*=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(x^2-2)=$$
$$=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2),$$

Знайдемо розв’язок задачі Коші. Для цього знайдемо y':

$$y'=-e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2)+e^{-x}(-C_1\sin x+C_2\cos x+2x)=$$
$$=e^{-x}(-C_1\cos x-C_2\sin x-x^2+2-C_1\sin x+C_2\cos x+2x)=$$
$$=e^{-x}((-C_1+C_2)\cos x+(-C_1-C_2)\sin x-x^2+2x+2).$$

Підставивши початкові умови $y(0)=0$, $y'(0)=1$, одержимо

$$y(0)=C_1-2=0 \Rightarrow C_1=2,$$
$$y'(0)=-C_1+C_2+2=1 \Rightarrow C_2=1.$$

Таким чином, одержимо відповідь:

$$y=e^{-x}(2\cos x+\sin x+x^2-2).$$