

Задача 3.

Розв'яжіть задану систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) методом Крамера;

б) методом Гаусса.

Приклад розв'язування.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -6, \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-3) + (-3) \cdot 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) \cdot 2 - (5 \cdot (-2) \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 3 \cdot 2) =$$
$$= 6 - 45 - 20 - (-50 - 18 + 6) = -59 - (-62) = -59 + 62 = 3;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ -7 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-2) \cdot (-3) + (-3) \cdot 3 \cdot (-7) + 5 \cdot 1 \cdot 2 - (5 \cdot (-2) \cdot (-7) +$$
$$+ (-3) \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot 3 \cdot 2) = -36 + 63 + 10 - (70 + 9 - 36) = 37 - 43 = -6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-3) + (-6) \cdot 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) \cdot (-7) - (5 \cdot 1 \cdot 5 + (-6) \cdot (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 3 \cdot (-7)) =$$
$$= -3 - 90 + 70 - (25 - 36 - 21) = -23 - (-32) = -23 + 32 = 9;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -6 \\ -2 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-7) + (-3) \cdot 1 \cdot 5 + (-6) \cdot (-2) \cdot 2 - ((-6) \cdot (-2) \cdot 5 +$$
$$+ (-3) \cdot (-2) \cdot (-7) + 1 \cdot 1 \cdot 2) = 14 - 15 + 24 - (60 - 42 + 2) = 23 - 20 = 3.$$

$$x_1 = \frac{-6}{3} = -2;$$

$$x_2 = \frac{9}{3} = 3;$$

$$x_3 = \frac{3}{3} = 1.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -6, \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$$

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ -2 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -3 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & -8 & 13 & -11 \\ 0 & 17 & -28 & 23 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & -8 & 13 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \end{array} \right).$$

$r = 3.$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -6, \\ -8x_2 + 13x_3 = -11, \\ -\frac{3}{8}x_3 = -\frac{3}{8}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Варіанти завдань для самостійного розв'язування.

$$\text{№1. } \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

$$\text{№2. } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -7, \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$\text{№3. } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -8, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 = -6. \end{cases}$$

$$\text{№4. } \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -5. \end{cases}$$

$$\text{№5.} \quad \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -7. \end{cases}$$

$$\text{№7.} \quad \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 = -2, \\ -x_1 + 3x_2 = -1, \\ -4x_1 + 5x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$\text{№9.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ -4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

$$\text{№11.} \quad \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$$

$$\text{№13.} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1, \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

$$\text{№15.} \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9, \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$$\text{№17.} \quad \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

$$\text{№19.} \quad \begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -4, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

$$\text{№21.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$$

$$\text{№23.} \quad \begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\text{№25.} \quad \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = -7, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\text{№27.} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$\text{№29.} \quad \begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

$$\text{№6.} \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{№8.} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 = 4, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

$$\text{№10.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -1, \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

$$\text{№12.} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

$$\text{№14.} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 4, \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

$$\text{№16.} \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$$

$$\text{№18.} \quad \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -4, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3, \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\text{№20.} \quad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 6, \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

$$\text{№22.} \quad \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -3, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$\text{№24.} \quad \begin{cases} -3x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

$$\text{№26.} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7. \end{cases}$$

$$\text{№28.} \quad \begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = -6. \end{cases}$$

$$\text{№30.} \quad \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + x_3 = -3, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$