

### Задача 6.

Для заданих точок  $A, B, C, D$  і  $M$  знайдіть:

- 1) скалярний добуток векторів  $\overline{AB}$  і  $\overline{AC}$ ;
- 2) векторний добуток векторів  $\overline{AB}$  і  $\overline{AC}$ ;
- 3) мішаний добуток векторів  $\overline{AB}, \overline{AC}$  і  $\overline{AD}$ ;
- 4) висоту піраміди  $ABCD$ , опущену з вершини  $D$ ;
- 5) проекцію вектора  $\overline{AB} + 2 \cdot \overline{AC}$  на вектор  $\overline{AD}$ ;
- 6) координати вектора  $\overline{AM}$  в базисі  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$  (якщо ці вектори утворюють базис).

#### Приклад розв'язування.

$A(-1, 2, 4), B(0, 5, 2), C(1, 1, 7), D(-2, 3, 1), M(1, 2, 3)$ .

1)  $\overline{AB} = (1, 3, -2); \overline{AC} = (2, -1, 3);$

$$\langle \overline{AB}, \overline{AC} \rangle = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 = 2 + (-3) + (-6) = -7.$$

$$2) [\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \bar{k} = (7, -7, -7).$$

3)  $\overline{AD} = (-1, 1, -3);$

$$\langle \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD} \rangle = \langle (7, -7, -7), (-1, 1, -3) \rangle = 7 \cdot (-1) + (-7) \cdot 1 + (-7) \cdot (-3) = (-7) + (-7) + 21 = 7.$$

4)  $|\overline{AB}, \overline{AC}| = \sqrt{(7)^2 + (-7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{49 + 49 + 49} = \sqrt{147} = 7 \cdot \sqrt{3};$

$$h = \frac{|\langle \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD} \rangle|}{|\overline{AB}, \overline{AC}|} = \frac{|7|}{7 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5)  $\bar{a} = \overline{AB} + 2 \cdot \overline{AC} = (1, 3, -2) + (4, -2, 6) = (5, 1, 4);$

$$np_{\overline{AD}} \bar{a} = \frac{\langle \bar{a}, \overline{AD} \rangle}{|\overline{AD}|} = \frac{\langle (5, 1, 4), (-1, 1, -3) \rangle}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{-5 + 1 + (-12)}{\sqrt{1 + 1 + 9}} = \frac{-16}{\sqrt{11}}.$$

6) Мішаний добуток векторів  $\overline{AB}, \overline{AC}$  і  $\overline{AD}$  дорівнює  $7 \neq 0$ , отже ці вектори утворюють базис. Знайдемо координати вектора  $\overline{AM} = (2, 0, -1)$  в цьому базисі.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

$$(A, B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right).$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -7x_2 + 4x_3 = -6, \\ -x_3 = -3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{7}, \\ x_2 = \frac{18}{7}, \\ x_3 = 3. \end{cases} \quad \overline{AM} = -\frac{1}{7}\overline{AB} + \frac{18}{7}\overline{AC} + 3\overline{AD}.$$

#### Варіанти завдань для самостійного розв'язування.

№1.  $A(-2, 1, 2), B(-1, 2, 4), C(1, 4, -1), D(2, -1, 3), M(2, 5, 1)$ .

№2.  $A(1, -1, 2), B(2, 3, 3), C(4, 1, -1), D(0, -1, 3), M(1, 2, 3)$ .

№3.  $A(2, 1, -3), B(3, 5, 2), C(1, 0, -2), D(4, 2, -1), M(2, 3, 1)$ .

№4.  $A(-1, 1, 2), B(0, 4, 1), C(2, 0, 3), D(1, 3, -1), M(4, 1, 3)$ .

№5.  $A(1, 3, 2), B(2, 5, 0), C(1, 2, 3), D(0, 3, -1), M(2, 1, 1)$ .

№6.  $A(2, 1, 1), B(-5, 0, 1), C(0, 4, 3), D(-4, 1, -2), M(-2, 2, -2)$ .

№7.  $A(3, -3, -2), B(0, 1, -3), C(-1, -1, 3), D(-5, 8, -1), M(-3, 4, 0)$ .

№8.  $A(2, 0, 3), B(5, 2, -2), C(-1, 4, -1), D(0, 7, -2), M(7, -3, 1)$ .

- №9.  $A(5, 1, -1)$ ,  $B(4, 3, -2)$ ,  $C(2, 2, -3)$ ,  $D(-4, 5, 0)$ ,  $M(6, 0, 4)$ .
- №10.  $A(0, 2, -1)$ ,  $B(1, 5, 2)$ ,  $C(5, 3, 3)$ ,  $D(3, -1, 1)$ ,  $M(-2, 1, 3)$ .
- №11.  $A(8, 7, 6)$ ,  $B(9, 8, 5)$ ,  $C(6, 2, 4)$ ,  $D(8, 5, 4)$ ,  $M(3, 6, 7)$ .
- №12.  $A(5, 2, 7)$ ,  $B(4, 3, 7)$ ,  $C(4, -1, 8)$ ,  $D(7, 5, 6)$ ,  $M(5, -2, 5)$ .
- №13.  $A(9, 6, 3)$ ,  $B(10, 5, 4)$ ,  $C(8, 5, 2)$ ,  $D(6, 6, 3)$ ,  $M(7, 4, 1)$ .
- №14.  $A(3, -2, -2)$ ,  $B(4, 1, -1)$ ,  $C(5, -5, -3)$ ,  $D(-1, -3, 0)$ ,  $M(1, -1, 0)$ .
- №15.  $A(1, -1, -3)$ ,  $B(2, 0, 2)$ ,  $C(4, -4, 1)$ ,  $D(-2, 3, -5)$ ,  $M(4, -4, -2)$ .
- №16.  $A(3, 3, -3)$ ,  $B(2, 4, -4)$ ,  $C(5, -1, -5)$ ,  $D(6, 5, 0)$ ,  $M(4, 5, -2)$ .
- №17.  $A(3, 6, 8)$ ,  $B(4, 7, 9)$ ,  $C(5, 9, 10)$ ,  $D(0, 4, 6)$ ,  $M(-1, 3, 5)$ .
- №18.  $A(3, 4, 1)$ ,  $B(2, 1, 2)$ ,  $C(0, -1, 3)$ ,  $D(1, 2, 3)$ ,  $M(2, 3, 4)$ .
- №19.  $A(-2, 3, 1)$ ,  $B(-1, 4, 3)$ ,  $C(1, 0, 2)$ ,  $D(2, 3, -1)$ ,  $M(2, 3, 4)$ .
- №20.  $A(1, 3, 4)$ ,  $B(0, 2, 5)$ ,  $C(2, 4, 6)$ ,  $D(2, 5, -1)$ ,  $M(4, 3, 1)$ .
- №21.  $A(5, -2, 4)$ ,  $B(4, 1, 3)$ ,  $C(6, -1, 1)$ ,  $D(3, 1, 2)$ ,  $M(2, -2, 4)$ .
- №22.  $A(3, 1, 4)$ ,  $B(2, 2, 1)$ ,  $C(1, -1, 2)$ ,  $D(4, 3, 2)$ ,  $M(-1, 2, 1)$ .
- №23.  $A(2, -1, 4)$ ,  $B(3, 2, 1)$ ,  $C(1, -3, 5)$ ,  $D(4, -4, 7)$ ,  $M(1, 2, 4)$ .
- №24.  $A(-1, 2, 4)$ ,  $B(0, 3, 1)$ ,  $C(1, 3, 2)$ ,  $D(2, 1, 5)$ ,  $M(-1, 2, 2)$ .
- №25.  $A(3, 2, -1)$ ,  $B(4, -1, 2)$ ,  $C(3, 1, -2)$ ,  $D(0, 3, 1)$ ,  $M(1, -1, 3)$ .
- №26.  $A(-3, 2, 1)$ ,  $B(-2, -1, 2)$ ,  $C(0, 1, 1)$ ,  $D(1, 0, 1)$ ,  $M(2, 1, -2)$ .
- №27.  $A(4, 2, -3)$ ,  $B(5, -1, 2)$ ,  $C(3, 1, -4)$ ,  $D(7, 1, -1)$ ,  $M(1, 2, 1)$ .
- №28.  $A(3, -1, 2)$ ,  $B(4, 1, -1)$ ,  $C(3, -3, 4)$ ,  $D(5, 2, -1)$ ,  $M(2, 1, 3)$ .
- №29.  $A(1, 3, -2)$ ,  $B(0, 2, -1)$ ,  $C(3, 2, 1)$ ,  $D(4, 2, 0)$ ,  $M(1, 2, 3)$ .
- №30.  $A(2, 1, -2)$ ,  $B(3, 2, 1)$ ,  $C(1, 3, 1)$ ,  $D(5, 2, -1)$ ,  $M(3, 2, -1)$ .