

### Задача 9.

Дано координати точок  $A$ ,  $B$  і  $C$  та рівняння площини  $\alpha$ .

Знайдіть:

- 1) рівняння прямої  $(AB)$ ;
- 2) рівняння площини  $(ABC)$ ;
- 3) напрямні косинуси нормалі до площини  $(ABC)$ ;
- 4) зображення піраміди, що утворюється площиною  $\alpha$  та координатними площинами;
- 5) відстань від точки  $A$  до площини  $\alpha$ ;
- 6) косинус кута  $\varphi$  між площинами  $(ABC)$  і  $\alpha$ ;
- 7) канонічне рівняння прямої  $l$ , по якій перетинаються площини  $(ABC)$  і  $\alpha$ .

#### Приклад розв'язування.

$A(-5, 3, 1)$ ,  $B(-3, 5, -1)$ ,  $C(-6, 2, 3)$ ,  $\alpha: 2x + y - 2z + 4 = 0$ .

$$1) (AB): \frac{x - (-5)}{-3 - (-5)} = \frac{y - 3}{5 - 3} = \frac{z - 1}{-1 - 1}; \frac{x + 5}{2} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 1}{-2}; \frac{x + 5}{1} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z - 1}{-1};$$

$$2) (ABC): \begin{vmatrix} x - (-5) & y - 3 & z - 1 \\ -3 - (-5) & 5 - 3 & -1 - 1 \\ -6 - (-5) & 2 - 3 & 3 - 1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} x - (-5) & y - 3 & z - 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} (x - (-5)) - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} (y - 3) + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} (z - 1) = 0;$$

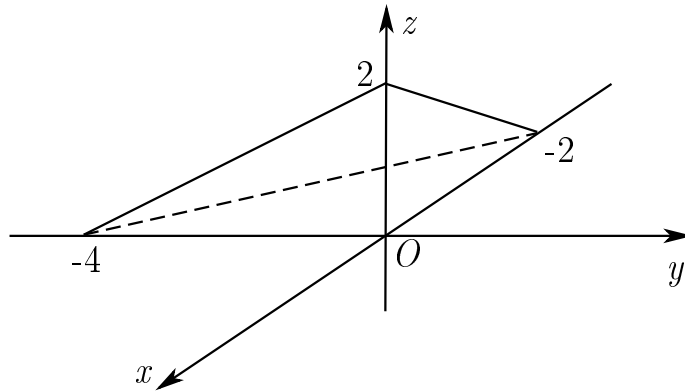
$$2(x - (-5)) + (-2)(y - 3) + 0(z - 1) = 0; 2x - 2y + 16 = 0; x - y + 8 = 0;$$

$$3) |\vec{n}_{ABC}| = |(1, -1, 0)| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \cos\gamma = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0;$$

$$4) \text{Перепишемо поіншому рівняння площини } \alpha: 2x + y - 2z = -4; \frac{2x}{-4} + \frac{y}{-4} + \frac{-2z}{-4} = 1; \frac{x}{-2} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{-2} = 1; \frac{x}{-2} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1;$$

Відрізки, які відтинає площина  $\alpha$  на координатних осях  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  відповідно:  $-2, -4, 2$ ;



$$5) d(A, \alpha) = \frac{|2 \cdot (-5) + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-10 + 3 - 2 + 4|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|-5|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3};$$

$$6) \cos\varphi = \frac{\langle (1, -1, 0), (2, 1, -2) \rangle}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (0)^2} \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2}} = \frac{1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{1 + 1} \sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{2 - 1}{\sqrt{2} \sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{1}{6}\sqrt{2};$$

$$7) \vec{a}_l = [\vec{n}_{ABC}, \vec{n}_\alpha] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (2, 2, 3);$$

Знайдемо деяку точку на перетині площин  $ABC$  і  $\alpha$ . Нехай  $z = 0$ , тоді:  $\begin{cases} x - y = -8, \\ 2x + y = -4; \end{cases}$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -8 \\ 2 & 1 & -4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -8 \\ 0 & 3 & 12 \end{array} \right); \begin{cases} x - y = -8, \\ 3y = 12; \end{cases} \begin{cases} x = -4, \\ y = 4; \end{cases}$$

$$l: \frac{x - (-4)}{2} = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 0}{3}; \frac{x + 4}{2} = \frac{y - 4}{2} = \frac{z}{3};$$

**Варіанти завдань для самостійного розв'язування.**

- №1.  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(3, 4, 2)$ ,  $C(2, 1, 3)$ ,  $\alpha : 2x - 3y + z + 5 = 0$ .
- №2.  $A(-2, 1, 3)$ ,  $B(3, 2, 2)$ ,  $C(1, 1, 2)$ ,  $\alpha : 2x - 2y + z + 4 = 0$ .
- №3.  $A(2, 1, 4)$ ,  $B(0, -2, 3)$ ,  $C(1, 2, 4)$ ,  $\alpha : x - 2y + 2z + 8 = 0$ .
- №4.  $A(2, 1, 5)$ ,  $B(1, 2, 3)$ ,  $C(4, -1, 3)$ ,  $\alpha : 3x + 2y + 4z + 1 = 0$ .
- №5.  $A(-1, 3, 2)$ ,  $B(2, 2, 3)$ ,  $C(-3, 1, 4)$ ,  $\alpha : x + 2y + 2z - 4 = 0$ .
- №6.  $A(2, 0, -1)$ ,  $B(3, 1, 1)$ ,  $C(2, 1, 2)$ ,  $\alpha : x + y + 5z - 5 = 0$ .
- №7.  $A(4, 1, -1)$ ,  $B(3, 1, 1)$ ,  $C(5, 2, 0)$ ,  $\alpha : 2x + y + 4z - 4 = 0$ .
- №8.  $A(3, 2, -2)$ ,  $B(1, 0, 4)$ ,  $C(2, 3, -1)$ ,  $\alpha : 3x - 2y + z + 6 = 0$ .
- №9.  $A(-1, 0, 4)$ ,  $B(3, -3, -2)$ ,  $C(1, -3, -3)$ ,  $\alpha : 2x + 4y - 3z - 3 = 0$ .
- №10.  $A(-2, -1, 3)$ ,  $B(-2, -1, 0)$ ,  $C(2, 2, -4)$ ,  $\alpha : x + 5y - 3z + 4 = 0$ .
- №11.  $A(1, 1, 8)$ ,  $B(4, 0, 2)$ ,  $C(1, 2, 5)$ ,  $\alpha : 2x - y + 3z + 5 = 0$ .
- №12.  $A(7, 2, 6)$ ,  $B(4, 1, 2)$ ,  $C(5, 1, 4)$ ,  $\alpha : 3x + 2y - 2z + 4 = 0$ .
- №13.  $A(-4, 5, -1)$ ,  $B(4, 3, 0)$ ,  $C(-3, 4, -2)$ ,  $\alpha : 4x - 5y + 6z + 5 = 0$ .
- №14.  $A(6, -1, 7)$ ,  $B(5, -3, 8)$ ,  $C(3, -5, 9)$ ,  $\alpha : 3x + y + 6z = 0$ .
- №15.  $A(2, 2, -6)$ ,  $B(6, 5, -4)$ ,  $C(8, 5, -10)$ ,  $\alpha : 3x - 5y + 6z + 12 = 0$ .
- №16.  $A(-5, 4, 7)$ ,  $B(-6, 6, 8)$ ,  $C(-7, 3, -1)$ ,  $\alpha : 7x + 5y - 2z + 3 = 0$ .
- №17.  $A(12, 5, 10)$ ,  $B(14, 7, 11)$ ,  $C(9, 8, 12)$ ,  $\alpha : x - 2y + 5z - 7 = 0$ .
- №18.  $A(-3, 6, -4)$ ,  $B(-5, 8, -3)$ ,  $C(-4, 7, -2)$ ,  $\alpha : 4x - 2y - 3z + 2 = 0$ .
- №19.  $A(2, 5, 9)$ ,  $B(4, 9, 7)$ ,  $C(3, 7, 5)$ ,  $\alpha : 5x + 4y + 8z - 6 = 0$ .
- №20.  $A(5, -3, -7)$ ,  $B(7, -5, -6)$ ,  $C(9, -4, -7)$ ,  $\alpha : 3x - 3y + 6z - 3 = 0$ .
- №21.  $A(10, 9, 12)$ ,  $B(13, 12, 11)$ ,  $C(9, 8, 10)$ ,  $\alpha : 12x + 4y + 8z - 4 = 0$ .
- №22.  $A(-11, 9, 13)$ ,  $B(-8, 11, 9)$ ,  $C(-10, 10, 12)$ ,  $\alpha : 4x - 4y + 5z + 3 = 0$ .
- №23.  $A(9, 9, 7)$ ,  $B(8, 8, 4)$ ,  $C(11, 11, 6)$ ,  $\alpha : 2x - 5y + 10z + 5 = 0$ .
- №24.  $A(-4, 8, 4)$ ,  $B(-5, 10, 6)$ ,  $C(-7, 11, 9)$ ,  $\alpha : 3x + 2y + 4z + 8 = 0$ .
- №25.  $A(5, -7, 7)$ ,  $B(8, -5, 8)$ ,  $C(6, -8, 8)$ ,  $\alpha : 5x + 4y - 4z - 3 = 0$ .
- №26.  $A(3, -7, 10)$ ,  $B(5, -6, 9)$ ,  $C(4, -8, 8)$ ,  $\alpha : 4x + 2y - 4z + 2 = 0$ .
- №27.  $A(5, 8, 8)$ ,  $B(8, 9, 10)$ ,  $C(4, 7, 10)$ ,  $\alpha : 3x - 5y - 3z + 6 = 0$ .
- №28.  $A(14, 9, -3)$ ,  $B(10, 8, -5)$ ,  $C(12, 10, -4)$ ,  $\alpha : 8x - 2y - 4z - 4 = 0$ .
- №29.  $A(-7, 9, 4)$ ,  $B(-5, 8, 5)$ ,  $C(-8, 10, 3)$ ,  $\alpha : 6x - 2y + 3z - 2 = 0$ .
- №30.  $A(-6, 8, -6)$ ,  $B(-7, 9, -4)$ ,  $C(-6, 10, -7)$ ,  $\alpha : x + 2y - 2z - 2 = 0$ .