Розрахунково-графічна робота
(частина I)

Задача 1. Маємо $z = f(x, y)$. Довести, що

$$F(x;\ y;\ z;\ \frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) = 0.$$

1. $z = \dfrac{y}{(x^2 - y^2)^5}$; $F = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{z}{y^2}$.
2. $z = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; $F = x^2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - xy \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2$.
3. $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$; $F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
4. $z = e^{xy}$; $F = x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz$.
5. $z = \ln(x + e^{-y})$; $F = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
6. $z = \dfrac{x}{y}$; $F = x \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$.
7. $z = x^y$; $F = y \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$.
8. $z = xe^{\frac{y}{x}}$; $F = x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
9. $z = \sin(x + ay)$; $F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
10. $z = \cos y + (y - x)\sin y$; $F = (x - y) \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Задача 2. Задані функція $z = f(x, y)$ і точки $A(x_0;\ y_0)$ і $B(x_1;\ y_1)$.

1. Обчислити наближене значення $\overline{z_1}(B)$ за допомогою повного диференціала;
2. Написати рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $C(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

1. $z = x^2 + xy + y^2$; $A(1;\ 2)$; $B(1{,}02;\ 1{,}96)$.
2. $z = 3x^2 - xy + x + y$; $A(1;\ 3)$; $B(1{,}06;\ 2{,}92)$.
3. $z = x^2 + 3xy - 6y$; $A(4;\ 1)$; $B(3{,}96;\ 1{,}03)$.
4. $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$; $A(2;\ 3)$; $B(2{,}02;\ 2{,}97)$.

5. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$; $A(2; 1)$; $B(1{,}96; 1{,}04)$.

6. $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$; $A(2; 4)$; $B(1{,}98; 3{,}91)$.

7. $z = 3x^2 + 2y^2 - xy$; $A(-1; 3)$; $B(-0{,}98; 2{,}97)$.

8. $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$; $A(3; 2)$; $B(3{,}05; 1{,}98)$.

9. $z = 2xy + 3y^2 - 5x$; $A(3; 4)$; $B(3{,}04; 3{,}95)$.

10. $z = xy + 2y^2 - 2x$; $A(1; 2)$; $B(0{,}97; 2{,}03)$.

Задача 3. Знайти похідну скалярного поля $U(x;\ y;\ z)$ в точці M за напрямком вектора $\overrightarrow{OM}$ (O – початок координат).

1. $U = 4\ln(3 + x^2) - 8xy$, $M(1; 1; 1)$.
2. $U = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$, $M(2; 4; 4)$.
3. $U = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz$, $M(1; 1; 1)$.
4. $U = \dfrac{1}{4}x^2 y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$, $M(-2; \dfrac{1}{2}; 1)$.
5. $U = xz^2 - \sqrt{x^3 y}$, $M(2; 2; 4)$.
6. $U = x\sqrt{y} - yz^2$, $M(2; 1; -1)$.
7. $U = 7\ln\left(\dfrac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz$, $M(1; 1; 1)$.
8. $U = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + xz$, $M(2; 2; -1)$.
9. $U = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$, $M(1; -2; 4)$.
10. $U = \sqrt{x^2 + y^2} - z$, $M(3; 4; 1)$.

Задача 4. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x,\ y)$ в замкненій області D, яку задано системою нерівностей. Зробити рисунок.

1. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27;\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3$.
2. $z = x^2 + 2y^2 + 1;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 3$.
3. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2;\ x \le 1,\ y \ge 0,\ y \le x$.
4. $z = x^2 + 3y^2 + x - y;\ x \ge 1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1$.
5. $z = x^2 + 2xy + 2y^2;\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$.
6. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4;\ x \ge -1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1$.
7. $z = 10 + 2xy - x^2;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ y + x \le 4$.
8. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x;\ x \le 0,\ y \le 0,\ x + y + 2 \ge 0$.
9. $z = x^2 + xy - 2;\ x \le 0,\ y \le 0,\ x + y + 3 \ge 0$.
10. $z = x^2 + xy;\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3$.