Застосування диференціального числення для дослідження функції.

Умови сталості і монотонності функції.

<u>*Теорема 1.*</u> Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Для того, щоб функція була сталою на інтервалі $(a;b)$. необхідно і достатньо, щоб $f'(x)=0$ при довільному x із інтервалу $(a;b)$.

<u>*Теорема 2.*</u> Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Для того, щоб функція $f(x)$ не спадала(не зростала) на інтервалі $(a;b)$ необхідно і достатньо, щоб $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ при довільному x із інтервалу $(a;b)$.

<u>*Теорема 3.*</u> Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Для того, щоб функція $f(x)$ була зростаючою (спадною) на інтервалі $(a;b)$ необхідно і достатньо, щоб $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ при довільному x із інтервалу $(a;b)$, причому ті точки x із $(a;b)$, в яких $f'(x)=0$, не складали б ніякого відрізка.

<u>*Наслідок.*</u> Якщо $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ при довільному x із інтервалу $(a;b)$, то на інтервалі $(a;b)$ функція $f(x)$ зростає (спадає).

Інтервали монотонності функції (інтервали спадання чи зростання) відділяються один від одного точками, де похідна функції рівна нулю або не існує. Дані точки називаються критичними точками.

Щоб знайти інтервали монотонності функції $y=f(x)$, необхідно: 1) знайти область визначення функції; 2) знайти похідну даної функції; 3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x)=0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує; 4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і в кожному з них визначити знак похідної. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

Приклад. Знайти інтервали монотонності функції $f(x)=\frac{1}{10}x^2-\ln x$.

Розв'язок. $f(x)=\frac{1}{10}x^2-\ln x$ визначена і диференційовна в $(0;+\infty)$. $f'(x)=\frac{x}{5}-\frac{1}{x}$.
Знайдемо нулі похідної: $\frac{x}{5}-\frac{1}{x}=0,\ x^2-5=0,\ x_1=\sqrt{5}$.Оскільки $f'(x)=\frac{x}{5}-\frac{1}{x}$ неперервна функція на інтервалі $(0;+\infty)$, то вона зберігає знак на інтервалах $(0;\sqrt{5})$, $(\sqrt{5};+\infty)$: $f'(2)<0;$ $f'(3)>0$. Тому $f'(x)<0$ для x із $(0;\sqrt{5})$ і $f'(x)>0$ для x із $(\sqrt{5};+\infty)$. Отже, функція $f(x)=\frac{1}{10}x^2-\ln x$ спадає на інтервалі $(0;\sqrt{5})$ і зростає на інтервалі $(\sqrt{5};+\infty)$.

Локальний екстремум. Достатні умови екстремуму.

<u>Правило 1.</u> Якщо x_0 – критична точка функції $y=f(x)$ і при довільному малому $\delta>0$ виконуються нерівності $f'(x_0-\delta)>0,\ f'(x_0+\delta)<0$, то функція $y=f(x)$ в точці x_0 має максимум; якщо ж $f'(x_0-\delta)<0,\ f'(x_0+\delta)>0$,то $y=f(x)$ в точці x_0 має мінімум; якщо ж знаки $f'(x_0-\delta)$ і $f'(x_0+\delta)$ однакові, то функція $y=f(x)$ в точці x_0 екстремуму не має.

<u>Правило 2.</u> Якщо $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0,$ то функція $y=f(x)$ в точці має екстремум, а саме максимум, якщо $f''(x_0)<0$, і мінімум, якщо $f''(x_0)>0$.

Для знаходження найбільшого (найменшого) значення функції $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$ необхідно із значень функції на кінцях відрізка і в критичних точках, які належать даному відрізку, вибрати найбільше (найменше).

Приклад 15. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 3x - x^3$ на відрізку $[-2; 3]$.

Розв'язання:

Знайдемо похідну: $y' = 3 - 3x^2$.

Знайдемо критичні точки, розв'язавши рівняння $y' = 0,\ 3 - 3x^2 = 0,\ x = \pm 1$ – стаціонарні точки, які належать вказаному відрізку $[-2; 3]$.

Визначимо значення функції в стаціонарних точках і на кінцях відрізка:

$$f(-1) = -3 + 1 = -2,\ \ f(1) = 3 - 1 = 2,\ \ f(-2) = -6 + 8 = 2,\ \ f(3) = 9 - 27 = -18.$$

Із знайдених значень вибираємо найбільше і найменше: $\max f(x) = 2$ на $[-2; 3]$, $\min f(x) = -18$ на $[-2; 3]$.

Опуклість. Увігнутість. Точки перегину.

Графік функції $y = f(x)$ називається опуклим (увігнутим) на інтервалі $(a; b)$, якщо він розташований нижче (вище) дотичної, проведеної в довільній точці графіка над даним інтервалом.

<u>Достатні умови опуклості (увігнутості) графіка функції:</u> Якщо $f''(x_0) < 0$ на інтервалі $(a; b)$, то графік функції опуклий на вказаному інтервалі; якщо $f''(x_0) > 0$, то графік функції увігнутий на інтервалі $(a; b)$.

Точка $(x_0; f(x_0))$ графіка функції, яка відділяє його опуклу частину від увігнутої називається <u>*точкою перегину*</u>. В абсцисах точок перегину друга похідна функції дорівнює нулю або не існує ($f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ – не існує). Точки, в яких $f''(x_0) = 0$ або не існує, називають критичними точками другого роду.

Якщо x_0 – критична точка другого роду і при довільному достатньо малому $\delta > 0$ виконуються нерівності $f''(x_0 - \delta) < 0,\ f''(x_0 + \delta) > 0$ або $f''(x_0 - \delta) > 0,\ f''(x_0 + \delta) < 0$, то точка кривої $y = f(x)$ з абсцисою x_0 є точкою перегину.

Приклад 16. Знайти проміжки опуклості та ввігнутості графіка функції $y = x^5 + 5x + 6$.

Розв'язання:

Знайдемо y'': $y' = 5x^4 + 5,\ y'' = 20x^3$. $x = 0$ – критична точка другого роду. Якщо $x < 0$, то $f'' < 0$ – крива опукла. Якщо $x > 0$, то $f'' > 0$ – крива ввігнута. Отже, на проміжку $(-\infty; 0]$ – крива випукла, а на $[0; +\infty)$ – ввігнута.

<u>*Асимптоти*</u>. Пряма L називається асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань від точки $M(x; y)$ кривої до прямої L прямує до нуля при необмеженому віддаленні даної точки по кривій від початку координат.

Пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо існує границя $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо існують границі:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx),$$

або

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx).$$

<u>Схема дослідження функції та побудова графіка.</u>

1. Знайти область визначення функції, інтервали неперервності, точки розриву.
2. Знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з координатними осями.
3. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.
4. Знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції у цих точках.
5. Знайти інтервали опуклості, ввігнутості та перегину.
6. Дослідження функції на межі області існування. Асимптоти графіка.
7. Побудувати графік функції, враховуючи дослідження.

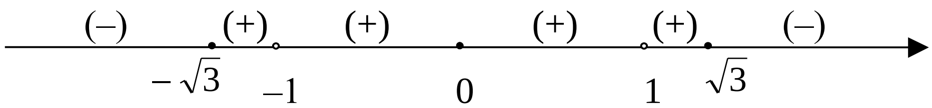
П р и к л а д 17. Дослідити методами диференціального числення функцію

$$y=\frac{x^3}{1-x^2}$$

та побудувати її графік.

Розв'язання:

1. Область визначення: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$. Точки розриву $x=1,\ x=-1$.
2. Якщо $x=0$, то $y=0$, тому графік перетинає осі координат в точці $O(0;0)$.
3. Функція не періодична. Оскільки $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{1-(-x)^2}=-f(x)$, то функція непарна, а отже графік функції симетричний відносно початку координат.
4. $y'=\dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}=0$. Розв'язком даного рівняння є $x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$. Похідна не існує в $x=\pm1$. Знайдемо знаки y' на проміжках:



Отже, на $(-\infty;-\sqrt{3}]$ – функція спадає,

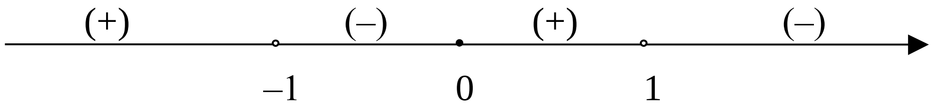
на $[-\sqrt{3};-1)\cup(-1;0]\cup[0;1)\cup(1;\sqrt{3}]$ – функція зростає,

на $[\sqrt{3};+\infty)$ – функція спадає.

У точках $x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$ функція має локальний екстремум: $x=\sqrt{3},\ y(\sqrt{3})=-2{,}6$ – локальний максимум, $x=-\sqrt{3},\ y(-\sqrt{3})=2{,}6$ – локальний мінімум.

5. Знаходимо y'': $y''=\dfrac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$. Похідна $y''=0$ при $x=0$ і не існує при $x=\pm1$.

Знайдемо знаки y'' на проміжках:



Отже, на $(-\infty;-1)\cup[0;1)$ – крива ввігнута, на $(-1;0)\cup(1;+\infty)$ – крива опукла.

6. $x=1,\ x=-1$ – вертикальні асимптоти кривої. Знайдемо похилу асимптоту кривої $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{(1-x^2)x}=-1,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}-(-1)x\right)=0,\quad y=-x$$ – похила асимптота.

7. Враховуючи проведені дослідження будуємо графік функції.