МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ПРАКТИКУМ
з інтегрального числення

ЧАСТИНА І
"Невизначений інтеграл"

Затверджено на засіданні
кафедри прикладної математики,
протокол № 7 від 18.02.03 р.,
та Методичною радою ЧДТУ,
протокол № 7 від 08.05.03 р.

Черкаси ЧДТУ 2005

УДК 517.31(076)
ББК 22.161.1
П 69

Укладачі: **Дідковський** Руслан Михайлович, к.т.н.,
Сисоєнко Валентина Василівна,
Щерба Валентина Олександрівна

Рецензент Щерба Анатолій Іванович, к.ф.-м.н., доцент

П 69 Практикум з інтегрального числення: Частина I. Невизначений інтеграл / Укл.: Р.М. Дідковський, В.В. Сисоєнко, В.О. Щерба. – Черкаси: ЧДТУ, 2005. – 72 с.
ISBN 966-7533-76-X
ISBN 966-7533-77-8

У практикумі наведено формулювання основних понять, теорем та рекомендації щодо їх використання при розв'язуванні задач; контрольні питання та завдання для закріплення знань із вивченого матеріалу, які можуть бути використані на аудиторних заняттях; завдання для виконання розрахунково-графічних робіт.

Для студентів технічних та економічних спеціальностей всіх форм навчання.

УДК 517.31(076)
ББК 22.161.1

Навчальне видання

П Р А К Т И К У М
з інтегрального числення

ЧАСТИНА I
"Невизначений інтеграл"

Редактор *Костенко Т.В.*
Технічне редагування і коректура *Давиденко К.В.*

Підписано до друку 22.04.2005. Формат 60х84 1/16. Папір офс. Гарн. Times New Roman.
Друк оперативний. Ум. друк. арк. 4,18. Обл.-вид. арк. 4,0. Тираж 1000 прим. Зам. №119-05

Черкаський державний технологічний університет

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 896 від 16.04.2002 р.

Надруковано в редакційно-видавничому центрі ЧДТУ
бульвар Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006.

ISBN 966-7533-76-X
ISBN 966-7533-77-8

ПЕРЕДМОВА

В усіх галузях сучасної науки і техніки, де потрібні точні методи дослідження, використовуються похідні та інтеграли.

Даний "Практикум з інтегрального числення" відповідає програмі дисципліни "Вища математика" для інженерно-технічних та економічних спеціальностей вузів.

"Невизначений інтеграл" є першою частиною практикуму, яка містить дев'ять розділів:

- Основні властивості та табличне інтегрування невизначених інтегралів.
- Метод інтегрування за допомогою підведення під знак диференціала.
- Найпростіші методи інтегрування.
- Метод інтегрування частинами.
- Метод підстановки.
- Інтегрування раціональних дробів.
- Інтегрування ірраціональних функцій.
- Інтегрування тригонометричних функцій.
- Інтегрування квадратичних ірраціональностей.

В кожному розділі наведено: посилання на навчальну літературу; короткі теоретичні відомості з інтегрального числення – формулювання основних понять і теорем; контрольні питання і завдання для закріплення знань; зразки розв'язування основних типів задач; підбір задач для роботи студентів в аудиторії; окремі розділи містять завдання для розрахунково-графічної роботи. Для індивідуалізації самостійної роботи студентів у завданнях для розрахунків передбачено 25 варіантів задач. Десятий розділ частини I практикуму складено із 15 варіантів підсумкової контрольної роботи на тему "Невизначений інтеграл", які містять по 6 вправ.

Практикум рекомендовано для студентів денної форми навчання, він також може бути використаний для самостійного опрацювання матеріалу студентами заочної форми навчання.

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Інтеграл (від латинського integer – цілий) – одне з найважливіших понять математики. Воно виникло в зв'язку з потребою, з одного боку, знаходити функції за їх похідними, а з другого – вимірювати площі, об'єми, довжини дуг, роботу змінної сили і т. ін. Відповідно до цього розрізняють невизначений і визначений інтеграли, обчислення яких і становить задачу інтегрального числення.

Слово "інтеграл" вперше в друкованому варіанті застосував Я. Бернуллі в 1690 р. За однією із версій, Бернуллі вивів цей термін від латинського integer – приводити до попереднього стану, відновлювати.

Майже одночасно І. Ньютон та Г. Лейбніц створили найважливіші розділи математики – диференціальне та інтегральне числення.

У Ньютона інтеграл (флюєнта) виступав, перш за все, як невизначений інтеграл, як первісна (термін Ж. Лагранжа). Вже в 1666 р. він встановив, що похідна (флюксія) від $x^{n+1}/(n+1)$ дорівнює x^n, і отримав інтеграл x^n у вигляді $x^{n+1}/(n+1)$, $n \neq -1$. І. Ньютон застосував метод розкладання підінтегральної функції в степеневий ряд з подальшим почленним інтегруванням. Він виражав інтеграли через нескінченні степеневі ряди, інтегрування в кінцевому вигляді займало в його дослідженнях другорядну роль. Коли Ньютон відкрив свою знамениту формулу інтегрального числення точно не відомо, скоріше за все, це було зроблено між 1666 та 1669 роками, але у будь-якому випадку, це було значно раніше перших відкриттів Г. Лейбніца.

В перших двох частинах своєї фундаментальної праці "Математичні начала натуральної філософії" І. Ньютон фактично проводив розрахунки, рівносильні обчисленню деяких подвійних і потрійних інтегралів.

У Лейбніца поняття інтеграла виступало у вигляді визначеного інтеграла. Введення поняття інтеграла і його позначення відноситься до осені 1675 р. Саме Лейбніц став записувати інтеграл формулою $\int y$, де $\int$ – подовжена літера S (перша літера слова *Summa*). В 1686 р. Лейбніц остаточно зупинився на записі $\int y\,\mathrm{d}x$, оскільки підсумовуються не лінії $y = y(x)$, а диференціали площ $y\,\mathrm{d}x$.

В 1694 р. Лейбніц друкує свою знамениту основну формулу інтегрального числення. Серед застосовуваних ним спеціальних методів інтегрування були: заміна змінної, інтегрування частинами, інтегрування раціональної функції за допомогою розкладання на найпростіші дроби (1702 – 1703).

На відміну від геніального метода флюксій і флюєнт Ньютона, ідеї робіт Лейбніца виявилися досить ясними, чіткими та загальнодоступними для французьких та англійських математиків того часу.

Величезна заслуга Ньютона і Лейбніца у формуванні і майбутньому розвитку математичної науки полягає в побудові алгоритму скінченого подання результату нескінченої операції.

В кінці XVII ст. Ньютон і Лейбніц незалежно один від одного встановили взаємозв'язок між інтегралом і похідною – найважливішими поняттями математичного аналізу. Нині це твердження називається основною теоремою інтегрального числення або формулою Ньютона–Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Тут $f(x)$ – довільна неперервна функція, $F(x)$ – деяка диференційовна на $[a;b]$ функція така, що $F'(x) \equiv f(x)$, $x \in [a;b]$.

§ 1. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ТАБЛИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Основні поняття та теореми
[2, с. 330 – 336; 8, с. 195 – 199; 9, с. 315 - 319]

Функція $F(x)$ називається *первісною* для $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, якщо $F(x)$ має похідну і виконується рівність $F'(x) = f(x)$ для всіх значень x з інтервалу $(a;b)$.

Зауважимо, що первісна для $f(x)$ визначається неоднозначно. Наприклад, для $f(x) = 2x$ на $x \in (-\infty;+\infty)$ первісними будуть функції $F(x) = x^2$ і $\Phi(x) = x^2 + 5$.

Основна теорема про первісну. *Якщо $F(x)$ та $\Phi(x)$ – довільні первісні для функцій $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$, то всюди на цьому інтервалі $F(x) - \Phi(x) \equiv C$, де C – деяка стала.*

Сукупність всіх первісних для $f(x)$ на $(a;b)$ називається *невизначеним інтегралом* від $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Знак $\int$ називається *інтегралом*, $f(x)\,\mathrm{d}x$ – *підінтегральним виразом*, $f(x)$ – *підінтегральною функцією*. Операція знаходження первісної (або невизначеного інтеграла) функції $f(x)$ називається *інтегруванням функції* $f(x)$. Таким чином, якщо $F(x)$ – одна з первісних для $f(x)$, то $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$. Наприклад, $\int (2x)\,\mathrm{d}x = x^2 + C$.

Виділимо основні властивості невизначеного інтеграла:

1) $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$;

2) $\int \mathrm{d}\varphi(x) = \varphi(x) + C$;

3) $\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$, $(k = const,\ k \neq 0)$;

4) $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Запишемо таблицю найпростіших інтегралів:

1. $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1).$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad (x \neq 0).$

3. $\int e^x \, dx = e^x + C.$

4. $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0 \;\; a \neq 1).$

5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{1 - x^2} = \dfrac{1}{2} \ln \left| \dfrac{1 + x}{1 - x} \right| + C, \quad (|x| \neq 1).$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C.$

13. $\int \mathrm{sh}\, x \, dx = \mathrm{ch}\, x + C.$

14. $\int \mathrm{ch}\, x \, dx = \mathrm{sh}\, x + C.$

15. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C.$

16. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C.$

17. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C.$

18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C.$

19. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{a + x}{a - x} \right| + C.$

20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C.$

Контрольні питання і завдання

1. Користуючись формулами диференціального числення, перевірити формули (11) і (12) таблиці найпростіших інтегралів.
2. Спираючись на основні властивості невизначеного інтеграла, показати його лінійність, а саме:
$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] \mathrm{d}x = \alpha \int f(x) + \beta \int g(x) \mathrm{d}x \text{, де } \alpha, \beta - const.$$
3. Нехай $\int f(x) \mathrm{d}x = F(x) + C$. Доведіть, що
$$\int f(ax+b) \mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \text{, де } a, b, C - const.$$
4. Чи має первісну функція $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0? \end{cases}$
5. Наведіть означення основних елементарних та елементарних функцій.

В інтегральному численні широко вживають первісні, які не можна подати через скінчене число арифметичних операцій і суперпозицій елементарних функцій, а саме:

1) інтеграл Пуассона $\int e^{-x^2} \mathrm{d}x$;
2) інтеграли Френеля $\int \cos x^2 \mathrm{d}x$ і $\int \sin x^2 \mathrm{d}x$;
3) інтегральний синус $\int \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$;
4) інтегральний косинус $\int \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x$;
5) інтегральний логарифм $\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$;
6) еліптичні інтеграли Лежандра $(0 < k < 1)$: $\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \, \mathrm{d}x$ і $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$.

Для всіх перерахованих нових функцій складено таблиці і графіки.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити інтеграли методом безпосереднього інтегрування. Результат перевірити диференціюванням.

1.1. $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,\mathrm{d}x=\int(\sqrt{x^3}+1)\,\mathrm{d}x=\int x^{3/2}\,\mathrm{d}x+\int \mathrm{d}x=$

$$=\frac{x^{3/2}+1}{3/2+1}+x+C=\frac{2}{5}x^{5/2}+x+C.$$

Перевірка:

$\mathrm{d}\left(\frac{2}{5}x^{5/2}+x+C\right)=\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}x^{3/2}+1\right)\mathrm{d}x=\left(x^{3/2}+1\right)\mathrm{d}x=(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,\mathrm{d}x,$ що дорівнює підінтегральному виразу.

1.2. $\int\frac{x^{1/3}+x^{2/5}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{x^{1/3}+x^{2/5}}{x^{1/2}}\mathrm{d}x=\int(x^{1/3-1/2}+x^{2/5-1/2})\,\mathrm{d}x=$

$$=\int(x^{1/6}+x^{-1/10})\,\mathrm{d}x=\frac{x^{-1/6+1}}{-1/6+1}+\frac{x^{-1/10+1}}{-1/10+1}+=\frac{6}{5}x^{5/6}+\frac{10}{9}x^{9/10}+C.$$

Перевірка:

$$\mathrm{d}\left(\frac{6}{5}x^{5/6}+\frac{10}{9}x^{9/10}+C\right)=\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}x^{-1/6}+\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{10}x^{-1/10}=\frac{(x^{-1/6}+x^{-1/10})\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{x^{1/3}+x^{2/5}}{\sqrt{x}},$$

що дорівнює підінтегральному виразу.

1.3. $\int 5^x e^x dx=\int(5e)^x dx=\frac{(5e)^x}{\ln 5e}+c=\frac{5^x e^x}{1+\ln 5}+C.$

Перевірка:

$$\mathrm{d}\left(\frac{5^x e^x}{1+\ln 5}+C\right)=\frac{1}{1+\ln 5}(5^x\ln 5e^x+5^x e^x)=\frac{5^x e^x(1+\ln 5)}{1+\ln 5}=5^x e^x,$$

що дорівнює підінтегральному виразу.

1.4. $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}-\int\mathrm{d}x=\mathrm{tg}\,x-x+C.$

Перевірка:

$$\mathrm{d}(\mathrm{tg}\,x-x+C)=(\frac{1}{\cos^2 x}-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x,$$

що дорівнює підінтегральному виразу.

1.5. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sin^2 x}-\int\frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sin^2 x}=$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C.$$

Перевірка:

$$\mathrm{d}(-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C)=\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x,$$

що дорівнює підінтегральному виразу.

Завдання для роботи в аудиторії

1. $\int(3x^2+6x+8)\,\mathrm{d}x.$

2. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$

3. $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\mathrm{d}x.$

4. $\int 2x^{-1,2}+3x^{-0,8}-5x^{-0,38}\,\mathrm{d}x.$

5. $\int\frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x.$

6. $\int\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{3x}}\mathrm{d}x.$

7. $\int\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

8. $\int\frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x.$

9. $\int(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{x^2})^3\,\mathrm{d}x.$

10. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+7}.$

11. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-10}.$

12. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}}.$

13. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8-x^2}}.$

14. $\int\operatorname{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x.$

15. $\int\operatorname{th}^2 x\,\mathrm{d}x.$

16. $\int\operatorname{cth}^2 x\,\mathrm{d}x.$

17. $\int\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\mathrm{d}x.$

18. $\int x(x+1)(x+2)\,\mathrm{d}x.$

19. $\int\left(3+\frac{1}{2}x^3\right)^2\mathrm{d}x.$

20. $\int(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2\,\mathrm{d}x.$

21. $\int\frac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}\mathrm{d}x.$

22. $\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\cos x\right)\mathrm{d}x.$

23. $\int\frac{\sin^2 x+2\sin x-5}{\sin^2 x}\mathrm{d}x.$

24. $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x.$

25. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x-\cos 2x}.$

§ 2. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ВВЕДЕННЯ НОВОГО АРГУМЕНТУ

Основні поняття і теореми [2, с. 336 – 338; 10, с. 320 – 322; 9, с. 321 – 322]

Цей метод інтегрування називають ще підведенням під знак диференціала. Ґрунтується він на інваріантності формули інтегрування.

Нехай $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$,

тоді $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$,

де змінна u може бути залежною: $u = \varphi(x)$. Таким чином, інтегрування виразів $\int f(\varphi)\,\mathrm{d}[\varphi(x)]$ можна провести за такою схемою:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\,\mathrm{d}[\varphi(x)] = F(\varphi(x)) + C.$$

В підінтегральному виразі виділяють множник і підводять його під знак диференціала. Керуються тим, щоб у функції, яка залишається під інтегралом, і у диференціала був однаковий новий аргумент. Після введення нового аргументу, для прикладів цього розділу, подальше інтегрування стає табличним.

Контрольні питання та завдання

1. Нехай $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$. Знайдіть $\mathrm{d}[F(\varphi(x))] = ?$

2. Нехай $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$. Користуючись методом підведення під знак диференціала, покажіть, що:

1) $\int f(x+b)\,\mathrm{d}x = F(x+b) + C$;

2) $\int f(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax) + C$;

3) $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

3. Який взаємозв’язок між методом введення нового аргументу та інтегруванням заміною змінної?

Зразки розв’язування задач

Приклад 1. Обчисліть інтеграли за допомогою введення нового аргументу.

1.1. $\int x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{d}(3-x^2) \right| = \frac{1}{2}\int (3-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(3-x^2) =$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}(3-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Перевірка:

$\mathrm{d}\left(-\frac{1}{3}\left(3-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C \right) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\left(3-x^2\right)^{\frac{1}{2}}(-2x)\,\mathrm{d}x = x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{d}x$ –

підінтегральний вираз.

1.2. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{8+x^3} = \left| \mathrm{d}(8+x^3) = 3x^2\,\mathrm{d}x \Rightarrow x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}(8+x^3) \right| =$

$$= \int \frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}(8+x^3)}{8+x^3} = \frac{1}{3}\ln\left|8+x^3\right| + C.$$

1.3. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\cos^2(x^3)} = \int \frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}(x^3)}{\cos^2(x^3)} = \frac{1}{3}\mathrm{tg}\,x^3 + C.$

1.4. $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1-\cos x} = \left|\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(1-\cos x)\right| = \int \frac{\mathrm{d}(1-\cos x)}{1-\cos x} = \ln\left|1-\cos x\right| + C.$

1.5. $\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-e^x}} = \left| \mathrm{d}(1-e^x) = -e^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow e^x\,\mathrm{d}x = -d(1-e^x) \right| =$

$$= -\int (1-e^x)^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}(1-e^x) = -\frac{(1-e^x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{2}(1-e^x)^{\frac{2}{3}} + C.$$

1.6. $\int \frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}(\mathrm{arctg}\,x) \right| = \int \mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}(\mathrm{arctg}\,x) = \frac{\mathrm{arctg}^2\,x}{2} + C.$

1.7. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \frac{\mathrm{d}x}{x} = d(\ln x) \right| = \int (\ln x)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}(\ln x) = \frac{(\ln x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}(\ln x)^{\frac{4}{3}} + C.$

1.8. $\displaystyle\int\frac{1-\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}=\left|\mathrm{d}(1-\operatorname{tg}x)=-\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=-\mathrm{d}(1-\operatorname{tg}x)\right|=$

$\displaystyle=\int-(1-\operatorname{tg}x)\,\mathrm{d}(1-\operatorname{tg}x)=-\frac{1}{2}(1-\operatorname{tg}x)^2+C.$

1.9. $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{3+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{l}\mathrm{d}(3+\cos^2 x)=-2\cos x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x=-\sin 2x\,\mathrm{d}x,\\ \sin 2x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(3+\cos^2 x)\end{array}\right|=$

$\displaystyle=\int\frac{-\mathrm{d}(3+\cos^2 x)}{3+\cos^2 x}=-\ln\left|3+\cos^2 x\right|+C.$

Завдання для роботи в аудиторії

1. $\int(x+9)^{13}\,\mathrm{d}x.$

2. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(3x-2)^7}.$

3. $\int(1+x^2)^7x\,\mathrm{d}x.$

4. $\int x\sqrt{5x^2+2}\,\mathrm{d}x.$

5. $\displaystyle\int\frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}\mathrm{d}x.$

6. $\displaystyle\int\frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x^5}}.$

7. $\int 2e^{-3x}\,\mathrm{d}x.$

8. $\int e^{2-x^3}x^2\,\mathrm{d}x.$

9. $\displaystyle\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x.$

10. $\int\cos(2x-3)\,\mathrm{d}x.$

11. $\int e^x\sin(e^x)\,\mathrm{d}x.$

12. $\int e^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x.$

13. $\int\sin^5 x\cos x\,\mathrm{d}x.$

14. $\displaystyle\int\cos(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}.$

15. $\displaystyle\int\cos\sqrt{x}\frac{\mathrm{d}}{\sqrt{x}}.$

16. $\displaystyle\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

17. $\int\cos^3 x\sin 2x\,\mathrm{d}x.$

18. $\displaystyle\int\left(\sin(3x-\frac{\pi}{4})\right)^{-2}\mathrm{d}x.$

19. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

20. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3 x}.$

21. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}.$

22. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{e^{-x}+1}.$

23. $\displaystyle\int\frac{\ln x-1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x.$

24. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(\arccos 3x)\sqrt{1-9x^2}}.$

25. $\displaystyle\int\frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^{2x}+25}.$

26. $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+4}.$

27. $\displaystyle\int\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^6+9}.$

28. $\displaystyle\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{25+\cos^2 x}.$

29. $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^4}}.$

30. $\displaystyle\int\frac{3^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-9^x}}.$

31. $\displaystyle\int\frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\mathrm{d}x.$

32. $\displaystyle\int\frac{e^{\arccos x}+x+2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

33. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-9\ln^2 x}}.$

34. $\int \frac{\sin 2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos^2 x + 4}}$. **35.** $\int \frac{\sin 2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos^4 x + 4}}$. **36.** $\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^x}}\,\mathrm{d}x$.

37. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$. **38.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9 - 4x^2}}$. **39.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{9x^2 + 25}$.

40. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + 25x^2}$.

Розрахункові завдання

Задача 1. Знайти інтеграли.

1. $\int \frac{(2x^3 + x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$. **2.** $\int \mathrm{tg}\,x \cdot \ln\cos x\,\mathrm{d}x$. **3.** $\int \frac{(x^3 + x)\,\mathrm{d}x}{(x^2 + 1)^2}$.

4. $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5}\,\mathrm{d}x$. **5.** $\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1}\,\mathrm{d}x$. **6.** $\int \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 1)^2}\,\mathrm{d}x$.

7. $\int \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3}\,\mathrm{d}x$. **8.** $\int \frac{1 + \ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$. **9.** $\int \frac{x^2 + \ln x^2}{x}\,\mathrm{d}x$.

10. $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x$. **11.** $\int \frac{\mathrm{tg}^3(x+1)}{\cos^2(x+1)}\,\mathrm{d}x$. **12.** $\int \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.

13. $\int \frac{x\cos x + \sin x}{(x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$. **14.** $\int \frac{1 + \ln(x-1)}{x - 1}\,\mathrm{d}x$. **15.** $\int \frac{4\,\mathrm{arctg}\,x - x}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

16. $\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2\sin x}\,\mathrm{d}x$. **17.** $\int \frac{8x - \mathrm{arctg}\,2x}{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x$. **18.** $\int \frac{\mathrm{arctg}\,x + x}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

19. $\int \frac{x - (\mathrm{arctg}\,x)^4}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$. **20.** $\int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x$. **21.** $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x\,\mathrm{d}x$.

22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(3\,\mathrm{tg}\,x + 1)}$. **23.** $\int \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 + x)}\,\mathrm{d}x$. **24.** $\int \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

25. $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^3}}$.

§ 3. НАЙПРОСТІШІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Основні поняття і теореми
[4, с. 364 – 377; 9, с. 319 – 320; 12, с. 316 – 318]

До найпростіших прийомів інтегрування віднесемо такі:

A) Метод розкладання.

Нехай $f(x) = f_1(x) + f(x)$, тоді $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x.$

Цим методом ми вже користувались в попередніх розділах. Зараз наводимо його для повноти викладення та з метою відзначення його важливості.

B) Метод виділення цілої частини підінтегрального дробу.

Інтеграли $\int \frac{Mx+N}{ax+b}\mathrm{d}x$ і $\int \frac{Mx^2+Nx+K}{ax^2+b}\mathrm{d}x$, $(a \neq 0)$, зводяться до табличних після виділення цілої частини підінтегрального дробу. Наприклад, нехай $f(x) = \frac{Mx+N}{ax+b}$, тоді

$$\frac{Mx+N}{ax+b} = \frac{1}{a}\cdot\frac{Mx+N}{x+\frac{b}{a}} = \frac{1}{a}\cdot\frac{M\left(x+\frac{b}{a}\right) - M\frac{b}{a} + N}{x+\frac{b}{a}} = \frac{1}{a}\cdot\left[M - \frac{N - M\frac{b}{a}}{x+\frac{b}{a}}\right] =$$

$$= \frac{M}{a} - \frac{N - M\frac{b}{a}}{a}\cdot\frac{1}{x+\frac{b}{a}}.$$

Значить,

$$\int \frac{Mx+N}{ax+b}\mathrm{d}x = \int\left[\frac{M}{a} - \frac{Na-Mb}{a^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{b}{a}}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{M}{a}x - \frac{Na-Mb}{a^2}\cdot\int\frac{d\left(x+\frac{b}{a}\right)}{x+\frac{b}{a}} = \frac{M}{a}x - \frac{Na-Mb}{a^2}\cdot\ln\left|x+\frac{b}{a}\right| + C.$$

C) Метод виділення повного квадрату.

Інтеграли виду $\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$ і $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$ зводяться до табличних за допомогою виділення повного квадрату в квадратному тричлені $(a \neq 0)$:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

Контрольні питання і завдання

1. Виділіть цілі частини дробів:

а) $\dfrac{x}{x+5}$.

б) $\dfrac{x+5}{x-5}$.

в) $\dfrac{3x+1}{2x-1}$.

г) $\dfrac{x^4}{x^2+1}$.

2. Розкладіть в суму дроби:

а) $\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$.

б) $\dfrac{1}{x(x+1)}$.

в) $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$.

г) $\dfrac{1}{x^2-7x+10}$.

3. Виділіть цілу частину і потім зінтегруйте:

$$\int\frac{Mx^2+Nx+K}{ax^2+b}\,\mathrm{d}\,x, \qquad (a\neq 0).$$

Зразки розв’язування задач

Приклад 1. Обчислити інтеграли шляхом розкладу підінтегрального виразу в суму.

1.1. $\int \frac{x}{x+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x+4)-4}{x+4}\,\mathrm{d}x = \int (1-\frac{4}{x+4})\,\mathrm{d}x = x - 4\ln|x+4| + C.$

1.2. $\int \frac{x}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{x}{x+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x =$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|\right) + C\,.$

1.3. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,\mathrm{d}x = \int \left(e^x - e^{-x}\right)\mathrm{d}x = e^x + e^{-x} + C.$

1.4. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2+1)-2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = x - 2\,\mathrm{arctg}x + C.$

1.5. $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{1-x} = -\int \frac{(x^4-1)+1}{x-1}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x-1}\,\mathrm{d}x =$

$= -\int \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = -\int (x^3+x^2+x+1)\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} =$

$= -\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} + x + \ln|x-1| + C \right).$

Приклад 2. Обчислити інтеграли, які містять квадратний тричлен.

2.1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x-5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-4-5} = \int \frac{\mathrm{d}(x+2)}{(x+2)^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+2-3}{x+2+3}\right| + C =$

$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right| + C\,.$

2.2. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x-3)} = \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)(x-3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-3)} =$

$= \ln|x-3| - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x-3} = \ln|x-3| - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2-1-3} = \ln|x-3| - \int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2-4} =$

$= \ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C\,.$

2.3. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{9}\right)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{8}{9}\right)}}=$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d(x-1/3)}{\sqrt{1-(x-1/3)^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\left(x-\frac{1}{3}\right)+C.$$

2.4. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x+1)}=\int\frac{dx}{x^2+x}=\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right|+C=$

$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C=\ln|x|-\ln|x+1|+C.$$

2.5. $\displaystyle\int\frac{e^x\,dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}=\int\frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1}}=\int\frac{d(e^x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(e^x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}=$

$$=\ln\left|e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{(e^x+\frac{1}{2})^2\,\frac{3}{4}}\right|+C=\ln\left|e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right|+C.$$

2.6. $\displaystyle\int\frac{(3x-9)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}=3\int\frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\left|d(x^2-4x+5)=(2x-4)\,dx\right|=$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-6)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-4-2)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-4)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}-$$

$$-3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-4x+5)}{\sqrt{x^2-4x+5}}-3\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}}=2\sqrt{x^2-4x+5}-$$

$$-3\ln\left|(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+1}\right|+C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

1. $\displaystyle\int\frac{5x}{2+3x}dx.$ **2.** $\displaystyle\int\frac{3+x}{3-x}dx.$ **3.** $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x-2}dx.$

4. $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^2+1}dx.$ **5.** $\displaystyle\int\frac{2x+3}{2x+1}dx.$ **6.** $\displaystyle\int\frac{3x+1}{5x+6}dx.$

7. $\displaystyle\int\frac{x^2+5x+7}{x+3}dx.$ **8.** $\displaystyle\int\frac{x^4+x^2+1}{x-1}dx.$ **9.** $\displaystyle\int\frac{3^{2x}-1}{\sqrt{3^x}}dx.$

10. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x.$ **11.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x-5}.$ **12.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-8x}.$

13. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4-5x^2+6}.$ **14.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{10x-x^2}}.$ **15.** $\int \frac{(4x-3)\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+6}.$

16. $\int \frac{(x+4)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x-x^2}}.$ **17.** $\int \frac{(2x+5)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9x^2+6x+2}}.$ **18.** $\int \frac{(2-5x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+9x+1}}.$

19. $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}.$ **20.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9x^2-6x+2}}.$ **21.** $\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{12x-9x^2-2}}.$

22. $\int \frac{(3x+5)\,\mathrm{d}x}{(x+1)(2x-3)}.$ **23.** $\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\mathrm{d}x.$ **24.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a-x)(b-x)}.$

25. $\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}.$ **26.** $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\mathrm{d}x.$

Розрахункові завдання

Задача 2. Знайти інтеграл.

1. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{-x^2+x+3}}\mathrm{d}x.$ **2.** $\int \frac{4x+3}{\sqrt{x^2-5x+2}}\mathrm{d}x.$ **3.** $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-6x+1}}\mathrm{d}x.$

4. $\int \frac{x+1}{\sqrt{{}^2+5x-1}}\mathrm{d}x.$ **5.** $\int \frac{1-x}{\sqrt{-x^2+5x-1}}\mathrm{d}x.$ **6.** $\int \frac{6x+11}{\sqrt{x^2-x+2}}\mathrm{d}x.$

7. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+x}}\mathrm{d}x.$ **8.** $\int \frac{3x+12}{\sqrt{x^2+2x-1}}\mathrm{d}x.$ **9.** $\int \frac{-5x+1}{\sqrt{x^2+5x}}\mathrm{d}x.$

10. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\mathrm{d}x.$ **11.** $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+3x}}\mathrm{d}x.$ **12.** $\int \frac{x-4}{\sqrt{(x-2)(x+1)}}\mathrm{d}x.$

13. $\int \frac{3x+6}{\sqrt{(x-1)(x+2)}}\mathrm{d}x.$ **14.** $\int \frac{3x+9}{\sqrt{x^2-x+4}}\mathrm{d}x.$ **15.** $\int \frac{2x+7}{\sqrt{(x-3)(x+2)}}\mathrm{d}x.$

16. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+5x-6}}\mathrm{d}x.$ **17.** $\int \frac{4-2x}{\sqrt{-x^2+5x+6}}\mathrm{d}x.$ **18.** $\int \frac{7-2x}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}\mathrm{d}x.$

19. $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2-4x+7}}\mathrm{d}x.$ **20.** $\int \frac{5+2x}{\sqrt{-x^2-6x-3}}\mathrm{d}x.$ **21.** $\int \frac{3x+5}{\sqrt{(x-3)(4-x)}}\mathrm{d}x.$

22. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-x+7}}\mathrm{d}x.$ **23.** $\int \frac{3x-1}{\sqrt{-x^2+x-8}}\mathrm{d}x.$ **24.** $\int \frac{7x+5}{\sqrt{4x^2+3x}}\mathrm{d}x.$

25. $\int \frac{2x+2}{\sqrt{7x^2-14x+5}}\mathrm{d}x.$

§ 4. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Основні поняття і теореми
[2, с. 340 – 342; 8, с. 202 – 205; 9, с. 325 – 328]

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – деякі диференційовані функції, тоді

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Останній вираз називають *формулою інтегрування частинами* і коротко записують у такому вигляді:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

Формула інтегрування частинами зводить питання про обчислення інтеграла $\int u\,\mathrm{d}v$ до обчислення інтеграла $\int v\,\mathrm{d}u = \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ (таким чином похідна "переводиться" з функції $v(x)$ на $u(x)$). В ряді конкретних випадків цей перехід спрощує підінтегральний вираз настільки, що новий інтеграл обчислити вже не важко.

Як показує практика, більша частина інтегралів, що обчислюється частинами, може бути розбита на такі три групи:

A. $$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = P_n(x); \mathrm{d}u = P_n{}'(x)\,\mathrm{d}x = P_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \begin{Bmatrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix}\mathrm{d}x; \quad v = \dfrac{1}{k}\begin{Bmatrix} e^{kx} \\ -\cos kx \\ \sin kx \end{Bmatrix} \end{matrix} \right|,$$ де $P_n(x)$ – многочлен степеня n; k – дійсне число $(k \neq 0)$.

B. $$\int \begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \mathrm{arctg}\, x \end{Bmatrix} P_n(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \mathrm{arctg}\, x \end{Bmatrix}; \ \mathrm{d}u = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \dfrac{1}{1+x^2} \end{Bmatrix}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = P_n(x)\,\mathrm{d}x; \ v = \int P_n(x)\,\mathrm{d}x = P_{n+1}(x) \end{matrix} \right|.$$

C. Інтеграли виду $\int e^{2x}\begin{Bmatrix} \cos\beta x \\ \sin\beta x \end{Bmatrix}\mathrm{d}x$, $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$, $\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

Позначаючи кожен із інтегралів цієї групи через I і проводячи двократне інтегрування частинами, ми складемо для I рівняння першого порядку.

Можна навести *приклади невизначених інтегралів*

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x},\ \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x},\ \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,\ \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2},$$

які дозволяють обчислення за методом інтегрування частинами, але не належать до жодної з вказаних груп. Тому наведена вище класифікація досить умовна.

Контрольні питання і завдання

1. Доведіть формулу інтегрування частинами.

2. За допомогою двократного інтегрування частинами покажіть рівність

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}+C.$$

3. Нехай $K_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, де $n \in N$, $a \neq 0$.

При $n \geq 2$:

$$K_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left[(x^2+a^2)-x^2\right]}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}} -$$

$$-\frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = K_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int x\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}.$$

Застосуйте до останнього інтегралу формулу інтегрування частинами, поклавши $u = x$, $\mathrm{d}v = (x^2+a^2)^{-n}\cdot 2x\,\mathrm{d}x$ і отримайте рекурентну формулу

$$K_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)}\cdot K_{n-1}.$$

4. Використовуючи результат попередньої задачі, покажіть, що

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\cdot \mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

5. За допомогою двократного інтегрування частинами отримайте рівності:

1) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$, $(a \neq 0)$;

2) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C$.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами.

1.1. $\int (2x+3)\sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} 2x+3=u \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x; \\ \sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \Rightarrow v = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \end{array} \right| =$

$$= -(2x+3)\cos x + 2\int \cos x\,\mathrm{d}x = -(2x+3)\cos x + 2\sin x + C.$$

1.2. $\int x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = u \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}; \\ x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \Rightarrow v = \int x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}x^2 \end{array} \right| = \dfrac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1} =$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

1.3. $\int x^2 \arcsin x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \arcsin x = u \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}; \\ x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \Rightarrow v = \int x^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}x^3 \end{array} \right| = \dfrac{1}{3}x^3 \arcsin x -$

$$- \frac{1}{3}\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x - \frac{1}{3}\left| \begin{array}{l} x^2 = u \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x; \\ \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}v \Rightarrow v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \arcsin x - \frac{1}{3}\left(-x^2\sqrt{1-x^2} + \int 2x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x +$$

$$+ \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C.$$

1.4. $\int \sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+16} = u \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+16}}\mathrm{d}x = \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+16}}; \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}v \Rightarrow v = x \end{array} \right| =$

$$= x\sqrt{x^2+16} - \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+16}} = x\sqrt{x^2+16} - \int \frac{(x^2+16)-16}{\sqrt{x^2+16}}\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+16} -$$

$$- \int \frac{x^2+16}{\sqrt{x^2+16}}\mathrm{d}x + \int \frac{16\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+16}} = x\sqrt{x^2+16} - \int \sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x +$$

$$+ 16\ln\left|x+\sqrt{x^2+16}\right| + C \Rightarrow \int \sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+16} + 16\ln\left|x+\sqrt{x^2+16}\right| -$$

$$- \int \sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x + C.$$

Розв’яжемо це рівняння відносно $\int\sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x$:

$$2\int\sqrt{x^2+16}=x\sqrt{x^2+16}+16\ln\left|x+\sqrt{x^2+16}\right|+C;$$

$$\int x^2+16=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+16}+8\ln\left|x+\sqrt{x^2+16}\right|+C.$$

1.5. $\int e^{2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{l} e^{2x}=u\Rightarrow \mathrm{d}u=2e^{2x};\\ \cos 3x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\Rightarrow v=\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\cos 3x\end{array}\right|=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-$

$$-\frac{2}{3}\int\sin 3x\cdot e^{2x}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{l} e^{2x}=u\Rightarrow \mathrm{d}u=2e^{2x};\\ \sin 3x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\Rightarrow v=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{array}\right|=\frac{1}{3}e^{2x}\cdot\sin 3x-$$

$$-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cdot\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{3}e^{2x}\cdot\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cdot\cos 3x-$$

$$-\frac{2^2}{3^2}\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x.$$

Маємо рівність

$$\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{2x}\cdot\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cdot\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x,$$

з якої визначаємо шуканий інтеграл:

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\cdot e^{2x}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C\Rightarrow\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{e^{2x}}{13}\cdot(3\sin 3x+2\cos 3x)+C.$$

1.6. $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{l}\arcsin\sqrt{x}=u\Rightarrow\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}};\\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}=\mathrm{d}v\Rightarrow v=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}=\int\frac{-\mathrm{d}(1-x)}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x}\end{array}\right|=$

$$=-2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}-\int\frac{-2\sqrt{1-x}\cdot\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}}=-2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

1. $\int (3x+2)\cos 5x \, dx$. **2.** $\int (2x-1)e^{3x} \, dx$. **3.** $\int x \cdot \sin 7x \, dx$.

4. $\int \ln x \, dx$. **5.** $\int \operatorname{arctg} x \, dx$. **6.** $\int \arcsin x \, dx$.

7. $\int x \arccos x \, dx$. **8.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$. **9.** $\int \frac{x \, dx}{e^x}$.

10. $\int \frac{x \, dx}{\sin^2 x}$. **11.** $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$. **12.** $\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} \, dx$.

13. $\int (x^2 + 5x + 6)\cos x \, dx$. **14.** $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$. **15.** $\int x \cdot \sin x \cdot \cos x \, dx$.

16. $\int x^2 \ln x \, dx$. **17.** $\int \sin \ln x \, dx$. **18.** $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$.

19. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$. **20.** $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1+x^2}}$. **21.** $\int \ln(x^2+1) \, dx$.

22. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$. **23.** $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$. **24.** $\int e^{\arccos x} \, dx$.

Розрахункові завдання

Задача 3. Знайти інтеграли.

1. $\int x \sin^2 x \, dx$. **2.** $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$. **3.** $\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x}$.

4. $\int (\sqrt{2} - 8x)\sin 5x \, dx$. **5.** $\int (7x-10)\cos 4x \, dx$. **6.** $\int (4x+3)\sin 5x \, dx$.

7. $\int 2 - 3x \sin 2x \, dx$. **8.** $\int (8-3x)\cos 5x \, dx$. **9.** $\int (4x+7)\cos 3x \, dx$.

10. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} \, dx$. **11.** $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} \, dx$. **12.** $\int e^{-2x} \cdot (4x-3) \, dx$.

13. $\int (2-4x)\sin 2x \, dx$. **14.** $\int (x\sqrt{2} - 3)\cos 2x \, dx$. **15.** $\int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} \, dx$.

16. $\int e^{-3x}(2-9x) \, dx$. **17.** $\int \ln(4x^2+1) \, dx$. **18.** $\int \ln(x^2+4) \, dx$.

19. $\int (1-6x)e^{2x} \, dx$. **20.** $\int (5x-2)e^{3x} \, dx$. **21.** $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} \, dx$.

22. $\int (4-3x)e^{-3x} \, dx$. **23.** $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} \, dx$. **24.** $\int (3x+4)e^{2x} \, dx$.

25. $\int x \cdot \cos^2 x \, dx$.

§ 5. МЕТОД ПІДСТАНОВКИ (ЗАМІНИ ЗМІННОЇ)

Основні поняття і теореми
[2, с. 337 – 339; 8, с. 199 – 201; 9, с. 821 – 325]

Важливу роль в інтегральному численні відіграє формула заміни змінної:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \ ,$$

де $f(x)$ – неперервна відносно x функція, а $x = \varphi(t)$ має неперервну відносно t похідну $\varphi'(t)$.

В даному випадку шляхом заміни змінної ми "виводимо" функцію $x = \varphi(t)$ з-під знака диференціала $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Якщо формулу заміни прочитати справа наліво, то отримуємо відомий нам метод інтегрування через "введення" функції під знак диференціала. Саме тому, для стислості викладення матеріалу, в багатьох підручниках окремо не виділяють інтегрування методом введення нового аргументу, а подають його під заголовком теореми про заміну змінної.

Звичайно, цей прийом можна застосувати не до кожного інтеграла. Крім того, слід підкреслити, що вибір правильної підстановки значною мірою визначається мистецтвом розв’язуючого. В наступних розділах ми дамо загальні рекомендації щодо вибору заміни відповідно до вигляду підінтегрального виразу.

Контрольні питання і завдання

1. Доведіть формулу заміни змінної.

2. Обчисліть інтеграли, користуючись методом підстановки:

1) $\int (3x-2)^{15}\,\mathrm{d}x$;

2) $\int \sqrt[5]{(7-2x)^4}\,\mathrm{d}x$;

3) $\int \cos(5x-4)\,\mathrm{d}x$.

3. За допомогою заміни $x = a \cdot t$ покажіть, що

1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$;

2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$;

3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

4. Доведіть, що за допомогою підстановки $t = x + \dfrac{b}{2a}$ інтеграли $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$ і $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$ зводяться до табличних.

5. Розглянемо такі неелементарні спеціальні функції:

1) $\mathrm{Ei}(x) = \displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$ – інтегральна експонента;

2) $\mathrm{Si}(x) = \displaystyle\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ – інтегральний синус;

3) $\mathrm{Ci}(x) = \displaystyle\int \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ – інтегральний косинус;

4) $\mathrm{Shi}(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{sh}\, x}{x}\,\mathrm{d}x$ – інтегральний гіперболічний синус;

5) $\mathrm{Chi}(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}\, x}{x}\,\mathrm{d}x$ – інтегральний гіперболічний косинус;

6) $\left.\begin{array}{l} \mathrm{S}(x) = \displaystyle\int \sin x^2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{C}(x) = \displaystyle\int \cos x^2\,\mathrm{d}x \end{array}\right\}$ – інтеграли Френеля;

7) $\Phi(x) = \displaystyle\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ – інтеграл Пуассона–Лапласа;

8) $\mathrm{Li}(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ – інтегральний логарифм.

Нехай $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Перевірте з точністю до сталої справедливість таких рівностей:

1) $\mathrm{Ei}(x) = \mathrm{Li}(e^x)$;

2) $\mathrm{Chi}(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{Ei}(x) + \mathrm{Ei}(-x))$;

3) $\mathrm{Shi}(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{Ei}(x) - \mathrm{Ei}(-x))$;

4) $\mathrm{Ei}(ix) = \mathrm{Ci}(x) + i \cdot \mathrm{Si}(x)$;

5) $\Phi\left(x \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \mathrm{C}(x) + i \cdot \mathrm{S}(x)$.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Заміна змінної.

1.1. $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+3}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=t\\ x+2=t^2\\ x=t^2-2\\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t+3}=2\int\frac{t+3-3}{t+3}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{3}{t+3}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=2\int\mathrm{d}t-6\int\frac{\mathrm{d}(t+3)}{t+3}=2t-6\ln|t+3|+C.$$

1.2. $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

I спосіб.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}}=\left|\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{\cos t};\quad \mathrm{d}x=\dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}dt;\\ \sqrt{x^2-2^2}=\sqrt{\dfrac{2^2}{\cos^2 t}-2^2}=a\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=\dfrac{2\sin t}{\cos t}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{2\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t\cdot\dfrac{2}{\cos t}\cdot\dfrac{2\sin t}{\cos t}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{2}=\frac{1}{2}t+C=\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x}+C.$$

II спосіб.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-4}}=\left|\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{t};\\ \mathrm{d}x=-\dfrac{a}{t^2}\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\frac{-\dfrac{2}{t^2}\mathrm{d}t}{\dfrac{2}{t}\sqrt{\dfrac{2^2}{t^2}-2^2}}=\int\frac{-\dfrac{2}{t^2}\mathrm{d}t}{\dfrac{2}{t}\cdot 2\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}}=\int-\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\arccos t+C=\left|t=\frac{2}{x}\right|=\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x}+C.$$

1.3. $$\int\frac{e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{e^x-1}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{e^x-1}=t\\ e^x-1=t^2\\ e^x=t^2+1\\ x=\ln(t^2+1)\\ \mathrm{d}x=\dfrac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t\end{array}\right|=2\int\frac{\sqrt{t^2+1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{t(t^2+1)}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=2\ln\left(e^{\frac{x}{2}}+\sqrt{e^x+1}\right)+C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+1}}$ (підстановка $x+1=z^2$).

2. $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$.

3. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\mathrm{d}x$.

4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$.

5. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x$.

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

7. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\mathrm{d}x$.

8. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x$.

9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}+m}$.

11. $\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ (підстановка $x=z^6$).

12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$.

13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

14. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$.

15. $\int \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (підстановка $e^x+1=z^4$).

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}}$.

17. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\mathrm{d}x$.

18. $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\sin 2x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

19. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x$.

20. $\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^3-x^3}}$.

21. $\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{(x^2-4)^2}$.

22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$.

23. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\mathrm{d}x$.

24. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

25. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

26. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$.

27. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

28. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}$.

29. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

30. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$.

31. $\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x(1+xe^x)}$.

Розрахункові завдання

Задача 4. Знайти інтеграли.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+3x}-\sqrt{2+3x}}$.

2. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$.

3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}}$.

4. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

5. $\int \frac{1+\sqrt[4]{5-2x}}{\sqrt{5-2x}}dx;$.

6. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

7. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$.

8. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1+x)^5}}$.

9. $\int \frac{\sqrt{x-4}}{x}dx$.

10. $\int \frac{\sqrt{1-4x}}{x}dx$.

11. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$.

13. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

14. $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)\,dx}{(\sqrt{x}+4)\cdot\sqrt[4]{x^3}}$.

15. $\int \frac{\sqrt{x+5}\,dx}{1+\sqrt[3]{x+5}}$.

16. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x}}dx$.

17. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx$.

18. $\int (1+e^{3x})^2 e^{3x}\,dx$.

19. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^{\frac{3}{2}}}$.

20. $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$.

21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$.

22. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^5}{1+x^2}dx$.

23. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$.

24. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x}}$.

25. $\int x\sqrt{3+x}\,dx$.

26. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

27. $\int \frac{\ln x\,dx}{x(1-\ln^2 x)}$.

28. $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}dx$.

29. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

30. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}dx$.

§ 6. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Основні поняття і теореми
[2, с. 342 – 355; 8, с. 205 – 217; 9, с. 328 – 337]

1. *Раціональним дробом* або *раціональною функцією* називається відношення двох алгебраїчних многочленів

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

де $\quad P_m(x) = b_0 \cdot x^m + b_1 \cdot x^{m-1} + ... + b_{m-1} \cdot x + b_m,\ b_0 \neq 0,$

$\quad\quad Q_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot x + a_n,\ a_0 \neq 0.$

Раціональний дріб $R(x)$ називається *правильним*, якщо степінь чисельника m строго менша степені знаменника n: $m < n$.

Питання про інтегрування раціональної функції вирішується шляхом розкладання підінтегрального виразу в суму більш простих доданків.

Поділити многочлен $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$ при $m \geq n$ значить знайти многочлен (частку)

$$S_{m-n}(x) = c_0 \cdot x^{m-n} + c_1 \cdot x^{m-n-1} + ... + c_{m-n},\ c_0 \neq 0,$$

і многочлен (залишок) $r_k(x)$ степені k, $k < n$, для яких виконується рівність:

$$P_m(x) = Q_n(x) \cdot S_{m-n}(x) + r_k(x).$$

Многочлени $S_{m-n}(x)$ і $r_k(x)$ визначаються однозначно, наприклад, за допомогою процесу ділення кутом (алгоритму ділення Евкліда). Процес знаходження частки S_{m-n} і r_k аналогічний до процесу ділення (з залишком) многозначного числа на многозначне. Роль цифр в записі відповідних розрядів відіграють коефіцієнти полінома біля відповідних степенів головної змінної. Для порівняння, поряд подано ділення чисел і многочленів:

A) $418 = 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0,$

$15 = 1 \cdot 10^1 + 5. \quad \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} -\,418 & 15 \\ \underline{30} & 27 \\ -\,118 & \\ \underline{105} & \\ \boxed{13} & \text{– залишок.} \end{array}$$

Тут $P = 417$, $Q = 15$, $S = 27$, $r = 13$;
$417 = 15 \cdot 27 + 13$.

B) $P_3(x) = 8 \cdot x^3 + 16 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4,$

$Q_2(x) = 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1. \quad \Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} -\,8x^3 + 16x^2 - 2x + 4 & 4x^2 - 2x + 1 \\ \underline{\ \ 8x^3 - 4x^2 + 2x\qquad\ } & 2x + 5 \\ \qquad -\,20x^2 - 4x + 4 & \\ \qquad\ \ \underline{20x^2 - 10x + 5} & \\ \qquad\qquad\quad \boxed{6x - 1} & \text{– залишок.} \end{array}$$

Тут $\quad S_1(x) = 2x + 5,$

$\quad\quad r_1(x) = x - 1.$

Значить:

$$8 \cdot x^3 + 16 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4 = (4x^2 - 2 \cdot x + 1)(2x + 5) + 6x - 1.$$

Таким чином, кожний неправильний раціональний дріб завжди за допомогою ділення "кутом" можна представити у вигляді суми алгебраїчного многочлена S_{m-n} і правильного раціонального дробу:

$$R(x) = S_{m-n}(x) + \frac{r_k(x)}{Q_n(x)}, \; 0 \le k < n \le m.$$

2. Нагадаємо, що невизначений інтеграл від многочлена є знову многочлен степені, на одиницю більшої від попередньої. Залишається навчитися інтегрувати правильний раціональний дріб ($m < n$).

Найпростішими дробами чотирьох типів називають, відповідно, такі раціональні функції:

I. $\dfrac{A}{x-a}$,

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$,

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$,

IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}$,

де k, s – натуральні числа, більші 1;

A, M, N, a, p, q – дійсні числа, причому $p^2 - 4q < 0$.

Як відомо з алгебри, довільний правильний раціональний дріб можна єдиним чином розкласти в суму найпростіших дробів чотирьох типів:

$$\frac{r_k(x)}{Q_n(x)} = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{k_j}\frac{A_{ij}}{(x-a_j)^k}\right) + \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\frac{M_{jk}\cdot x + N_{jk}}{(x^2+p_j\cdot x+q_j)^k}\right),$$

де знаменник $Q_n(x)$ попередньо розкладено в добуток найпростіших множників

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_l)^{k_l}\cdot(x^2+p_1\cdot x+q_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_s\cdot x+q_s)^{m_s}.$$

Для конкретного визначення сталих A, M та N у розкладі дробу $r_k(x)/Q_n(x)$ в суму найпростіших, слід привести названу рівність до спільного знаменника і після цього прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x в чисельниках.

Крім методу невизначених коефіцієнтів, який приводить до мети завжди, широко вживаний метод викреслювання.

Цей метод особливо ефективний у застосуванні до раціональних дробів, знаменник яких $Q_n(x)$ має лише прості (однократні) дійсні корені. Нехай

$$Q_n(x) = (x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot(x-a_3)\cdot\ldots\cdot(x-a_n),$$

тоді $\dfrac{r_k}{Q_n} = \dfrac{A_1}{x-a_1} + \dfrac{A}{x-a_2} + \ldots + \dfrac{A_n}{x-a_n}$, і значить

$$r_k(x) = A_1(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n) + A_2(x-a_1)\cdot(x-a_3)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)+\ldots$$
$$\ldots + A_n\cdot(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_{n-1}).$$

Після підстановки в останню формулу значення $x = a_j$ всі доданки правої частини, окрім j-го, перетворюються на нуль:

$$\begin{array}{l|l}
x = a_1 & r_k(a_1) = A_1\cdot(a_1-a_2)\cdot\ldots\cdot(a_1-a_n), \Rightarrow A_1 = \dfrac{r_k(a_1)}{(a_1-a_2)\cdot\ldots\cdot(a_1-a_n)}; \\
\ldots & \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x = a_n & r_k(a_n) = A_n\cdot(a_n-a_1)\cdot\ldots\cdot(a_n-a_{n-1}), \Rightarrow A_n = \dfrac{r_k(a_n)}{(a_n-a_1)\cdot\ldots\cdot(a_n-a_{n-1})}.
\end{array}$$

3. Кожен із чотирьох вище означених найпростіших дробів інтегрується в елементарних функціях.

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\cdot\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a} = A\cdot\ln|x-a| + C$.

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x = A\cdot\int(x-a)^{-k}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$, $k \ge 2$.

III. В знаменнику дробу третього типу ($p^2 - 4q < 0$) виділяємо новий квадрат і

проводимо заміну: $t = x + \dfrac{p}{2}$, $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$.

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\cdot\int\frac{2t\cdot\mathrm{d}t}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\cdot\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\cdot\ln\left|t^2+a^2\right| + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

IV. Як і в попередньому випадку, за допомогою заміни

$t = x + \dfrac{p}{2}$, $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$, $n \ge 2$, запишемо

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\cdot\int\frac{2t\cdot\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\cdot\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} =$$
$$= -\frac{M}{2(n-1)}\cdot\left(t^2+a^2\right)^{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)K_n(t),$$

де $K_n(t) = \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$ – обчислюється за рекурентною формулою (див. контрольне завдання 4 з розділу 4):

$$K_n(t) = \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)}\cdot K_{n-1},\ n \ge 2,$$

$$K_1(t) = \int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Таким чином, довільна раціональна функція інтегрується в елементарних функціях.

Додаток. Метод Остроградського виділення раціональної частини інтеграла від раціонального дробу.

Видатному російському вченому, талановитому учневі Коші, українцю за походженням, Михайлу Васильовичу Остроградському (1801 – 1861) належить дотепний метод інтегрування раціональних дробів. При інтегруванні дробів за цією методою не обов'язково попередньо розкладати заданий дріб в суму найпростіших. Особливо ефективний метод в тому випадку, коли корені знаменника в основному кратні або коли їх знаходження викликає ускладнення.

Остроградський М.В. встановив, що

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \mathrm{d}x,$$

де $P_1(x)/Q_1(x)$ та $P_2(x)/Q_2(x)$ – правильні раціональні дроби. Тут $Q_1(x)$ – найбільший спільний дільник знаменника $Q(x)$ і його похідної $Q'(x)$:

$$Q_1(x) = HCD\left\{Q(x);\ Q'(x)\right\}.$$

До речі, $Q_1(x)$ можна обчислити за відомим з алгебри алгоритмом Евкліда, многочлен $Q_2(x)$ – частка від ділення $Q(x)$ на $Q_1(x)$:

$$Q_2(x) = Q(x)/Q_1(x).$$

Наприклад, якщо

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_l)^{k_l} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{m_s},$$

то

$$Q_1(x) = (x - a_1)^{k_1 - 1} \cdot \ldots \cdot (x - a_l)^{k_l - 1} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1 - 1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{m_s - 1},$$

а

$$Q_2(x) = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_l) \cdot (x^2 + p_1 x + q_1) \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_s x + q_s).$$

Як бачимо, за цією методою інтегрування раціональної функції загального виду зводиться до інтегрування правильних дробів з простими коренями знаменника.

Залишається обчислити многочлени $P_1(x)$ та $P_2(x)$, які задаються як многочлени з невизначеними коефіцієнтами, степені на 1 меншої $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ відповідно.

Для обчислення вказаних невизначених коефіцієнтів потрібно продиференціювати формулу Остроградського:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Потім привести отриманий результат до спільного знаменника і зіставити коефіцієнти біля однакових степенів x в чисельниках.

Більш детально з вказаним методом можна ознайомитися в підручнику [10, с. 353 – 359; 11, с. 376 – 380].

Контрольні питання і завдання

1. Дайте означення комплексного числа і поля комплексних чисел. Означте дію спряження комплексного числа, наведіть її властивості і геометричне тлумачення.
2. Сформулюйте і спробуйте самостійно довести теорему Безу.
3. Сформулюйте основну теорему алгебри.
4. Спираючись на основну теорему алгебри, покажіть, що алгебраїчний многочлен степені n над полем комплексних чисел має рівно n коренів.
5. Для алгебраїчних многочленів з дійсними коефіцієнтами сформулюйте теорему про спряжені корені.
6. Нехай задано правильний дріб
   $\dfrac{P(x)}{(x-a)^n\cdot\varphi(x)}$, де $\varphi(x)$ – многочлен такий, що $\varphi(a)\neq 0$.
   Покажіть, що тоді має місце такий розклад в суму правильних дробів:
   $\dfrac{P(x)}{(x-a)^n\cdot\varphi(x)}=\dfrac{A}{(x-a)^n}+\dfrac{\psi(x)}{(x-a)^{n-k}\cdot\varphi(x)}$,
   де $\psi(x)$ – многочлен, k – натуральне число, стала $A=P(a)/\varphi(a)$.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Знаменник має дійсні різні корені.

$$I=\int\frac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}\mathrm{d}x.$$

Розв'язок. Дріб під інтегралом неправильний, оскільки степінь чисельника вища степеня знаменника ($4>3$). Тому насамперед виділимо цілу частину. Для цього поділимо чисельник $2x^4-x^3+5$ на знаменник x^3-9x:

$$\begin{array}{rl|l}
- & 2x^4-x^3+5 & x^3-9x \\
\cline{3-3}
 & 2x^4-18x^2 & 2x-1 \\
\hline
- & -x^3+18x^2+5 & \\
 & -x^3+9x & \\
\hline
 & 18x^2-9x+5 &
\end{array}$$

Тому

$$I=\int\left(2x-1+\frac{18x^2-9x+5}{x^3-9x}\right)\mathrm{d}x=x^2-x+\int\frac{18x^2-9x+5}{x^3-9x}\mathrm{d}x.$$

Розкладемо знаменник підінтегрального дробу на множники

$$x^3-9x=x(x^2-9)=x(x-3)(x+3).$$

Розглянемо дріб

$$\frac{18x^2-9x+5}{x(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+3}=\frac{A(x-3)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x+3)}.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A, B і C застосуємо метод "викреслювання":

$$\begin{array}{l|l} x=0 & 5=A(-3)\cdot 3;\ A=-\dfrac{5}{9}; \\ x=3 & 18\cdot 9-9\cdot 3+5=B\cdot 3(3+3);\ 140=18B;\ B=\dfrac{70}{9}; \\ x=-3 & 8\cdot 9-9\cdot 3+5=C(-3)(-3-3);\ 194=18C;\ C=\dfrac{97}{9}. \end{array}$$

Отже

$$I=x^2-x+\int\left(\frac{-\frac{5}{9}}{x}+\frac{\frac{70}{9}}{x-3}+\frac{\frac{97}{9}}{x+3}\right)\mathrm{d}x=x^2-x-\frac{5}{9}\ln|x|+\frac{70}{9}\ln|x-3|+\frac{97}{9}\ln|x+3|+C.$$

Приклад 2. Знаменник має дійсні кратні корені.

$$I=\int\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}\mathrm{d}x.$$

Розв'язок. Даний дріб правильний і не скоротний, тому подамо його у вигляді

$$\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{E}{x+2}=$$

$$=\frac{A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)^2+C(x-1)^2(x+2)^2+D(x-1)^3+E(x-1)^3(x+2)}{(x-1)^3(x+2)^2}=$$

$$=\frac{(C+E)x^4+(B+2C+D-E)x^3+(A+3B-3C-3D-3E)x^2}{(x-1)^3(x+2)^2}+$$

$$+\frac{(4A-4C+3D+5E)x+4A-4B+4C-D-2E}{(x-1)^3(x+2)^2}.$$

Скомбінуємо метод "викреслювання"

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 2+5-8=A(1+2)^2;\ -1=9A;\ A=-\dfrac{1}{9}; \\ x=-2 & 2\cdot 4-5\cdot 2-8=D(-2-1)^3;\ -10=-27D;\ D=\dfrac{10}{27}. \end{array}$$

з методом невизначених коефіцієнтів, відповідно до якого маємо систему

$$\begin{cases} C+E=0, \\ B+2C+D-E=0, \\ A+3B-3C-3D-3E=2, \\ 4A-4C+3D+5E=5, \\ 4A-4B+4C-D-2E=-8. \end{cases}$$

Підставивши в перші три рівняння знайдені значення $A=-\dfrac{1}{9}$ і $D=\dfrac{10}{27}$, отримаємо

$$\begin{cases} C+E=0, \\ B+2C+\dfrac{10}{27}-E=0, \\ -\dfrac{1}{9}+3B-3C-3\cdot\dfrac{10}{27}-3E=2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C+E=0, \\ B+2C-E=-\dfrac{10}{27}, \\ B-C-E=\dfrac{29}{27}. \end{cases}$$

За методом Гаусса маємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -\dfrac{10}{27} \\ 1 & -1 & -1 & \dfrac{29}{27} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -\dfrac{39}{27} \\ 1 & 0 & 0 & \dfrac{29}{27} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{29}{27} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{13}{27} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{29}{27} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{13}{27} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{13}{27} \end{array}\right).$$

Звідси знайдемо, що $B=\dfrac{29}{27}$, $C=-\dfrac{13}{27}$ і $E=\dfrac{13}{27}$. Отже

$$I=\int\left(\frac{-\frac{1}{9}}{(x-1)^3}+\frac{\frac{29}{27}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{13}{27}}{x-1}+\frac{\frac{10}{27}}{(x+2)^2}+\frac{\frac{13}{27}}{x+2}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{9}\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{29}{27}\frac{1}{x-1}-\frac{13}{27}\ln|x-1|-\frac{10}{27}\frac{1}{x+2}+\frac{13}{27}\ln|x+2|+C=$$

$$=-\frac{26x^2+5x-34}{18(x-1)^2(x+2)}+\frac{13}{27}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+C.$$

Приклад 3. Знаменник має комплексні корені.

$$I=\int\frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}\mathrm{d}x.$$

Розв'язок. Дріб, що стоїть під інтегралом, – неправильний. Тому виділимо цілу частину.

$$\begin{array}{r|l} -\;x^4+5x^3-7x^2+5 & x^3-x^2+5x-5 \\ \underline{x^4-x^3+5x-5} & \overline{x+6} \\ -\;6x^3-12x^2+5x+5 & \\ \underline{6x^3-6x^2+30x-30} & \\ -6x^2-25x+35 & \end{array}$$

Отримаємо $x+6-\dfrac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}$.

Розкладемо знаменник на множники

$x^3-x^2+5x-5=x^2(x-1)+5(x-1)=(x-1)(x^2+5)$.

Розкладемо дріб $\dfrac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}$ на найпростіші.

$$\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+5}=\frac{A(x^2+5)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+5)}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-B+C)x+(5A-C)}{(x-1)(x^2+5)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, відповідно до МНК, будемо мати

$$\begin{cases} A+B=6, \\ -B+C=25, \\ 5A-C=-35. \end{cases}$$

Отже, за методом Гаусса маємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 25 \\ 5 & 0 & -1 & -35 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 25 \\ 0 & -5 & -1 & -65 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & -6 & -190 \end{array}\right)$$

$$C=\frac{190}{6}=\frac{95}{3},$$

$$B=C-25=\frac{95}{3}-25=\frac{20}{3},$$

$$A=-B+6=-\frac{20}{3}+6=-\frac{2}{3}.$$

Дістанемо $A=-\dfrac{2}{3}$; $B=\dfrac{20}{3}$; $C=\dfrac{95}{3}$.

Тоді

$$I=\int\left(x+6-\left(\frac{-\frac{2}{3}}{x-1}+\frac{\frac{20}{3}x+\frac{95}{3}}{x^2+5}\right)\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+6x+\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{20}{3}\int\frac{x}{x^2+5}\mathrm{d}x-$$

$$-\frac{95}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+5}=\frac{x^2}{2}+6x+\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{10}{3}\ln(x^2+5)-\frac{95}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Приклад 4. Знаменник має кратні комплексні корені.

$$I=\int\frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)^2}\mathrm{d}x.$$

Розв'язок. Розкладемо дріб на найпростіші:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+4}.$$

Аналогічно до попередніх задач знайдемо:

$A=\frac{1}{25}$, $B=-\frac{4}{125}$, $C=\frac{18}{125}$, $D=-\frac{31}{125}$, $E=\frac{4}{125}$, $F=\frac{3}{125}$.

Тоді $I=\int\left(\frac{\frac{1}{25}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{4}{125}}{x-1}+\frac{\frac{18}{125}x-\frac{31}{125}}{(x^2+4)^2}+\frac{\frac{4}{125}x+\frac{3}{125}}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{25(x-1)}-$

$-\frac{4}{125}\ln|x-1|+\frac{1}{125}\int\frac{18x-31}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x+\frac{4}{125}\int\frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x+\frac{3}{125}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}=-\frac{1}{25(x-1)}-$

$-\frac{4}{125}\ln|x-1|+\frac{1}{125}\int\frac{18x-31}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x+\frac{2}{125}\ln(x^2+4)+\frac{3}{250}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}.$

Обчислимо останній у цьому виразі інтеграл окремо.

$$I_1=\int\frac{18x-31}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x=18\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}-31\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}=-\frac{9}{x^2+4}-31\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}.$$

Під інтегралом $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}$ міститься дріб 4-го виду, який віднайдемо за методом Ейлера:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{x^2+4-x^2}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}-\frac{1}{4}\int\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\int x\frac{x}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=x; & \mathrm{d}u=\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v=\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}; & v=\frac{1}{2}\frac{(x^2+4)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{2(x^2+4)}\end{array}\right|=\frac{1}{8}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}-$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{x}{2(x^2+4)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4}\right)=\frac{1}{8}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+\frac{x}{8(x^2+4)}-\frac{1}{16}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C=\frac{1}{16}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+$$

$$+\frac{x}{8(x^2+4)}+C.$$

Тоді $I_1=-\frac{9}{x^2+4}-31\left(\frac{1}{16}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+\frac{x}{8(x^2+4)}\right)+C=-\frac{9}{x^2+4}-\frac{31}{16}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}-$

$$-\frac{31x}{8(x^2+4)}+C=-\frac{31x+72}{8(x^2+4)}-\frac{31}{16}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Отже $I=-\frac{1}{25}\frac{1}{x-1}-\frac{4}{125}\ln|x-1|+\frac{1}{125}\left(-\frac{31x+72}{8(x^2+4)}-\frac{31}{16}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{125}\ln(x^2+4)+$

$$+\frac{3}{250}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C=\frac{2}{125}\ln\frac{x^2+4}{(x-1)^2}-\frac{1}{25}\frac{40(x^2+4)+(31x+72)(x-1)}{40(x-1)(x^2+4)}-$$

$$-\frac{7}{2000}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C=\frac{2}{125}\ln\frac{x^2+4}{(x-1)^2}-\frac{71x^2+41x+88}{1000(x-1)(x^2+4)}-\frac{7}{2000}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

В задачах 1 – 56 знайти інтеграли.

1) Знаменник має тільки дійсні різні корені.

1. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(2x+1)}$.

2. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{2x^2-3x-2}$.

3. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\mathrm{d}x$.

4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{6x^3-7x^2-3x}$.

5. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\mathrm{d}x$.

6. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\mathrm{d}x$.

7. $\int \frac{32x\,\mathrm{d}x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$.

8. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4-3x^2+2}$.

9. $\int \frac{(2x^2-5)\,\mathrm{d}x}{x^4-5x^2+6}$.

10. $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\mathrm{d}x$.

2) Знаменник має тільки дійсні корені; деякі корені – кратні.

11. $\int \frac{(x^2-3x+2)\,\mathrm{d}x}{x(x^2+2x+1)}$.

12. $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

13. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^3+5x^2+8x+4}$.

14. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x$.

15. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\mathrm{d}x$.

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-x^2}$.

17. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2(x+4)^2}$.

18. $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}\mathrm{d}x$.

19. $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \mathrm{d}x$.

20. $\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2-1)}$.

21. $\int \frac{(x^2-2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}$.

22. $\int \frac{(7x^3-9)\,\mathrm{d}x}{x^4-5x^3+6x^2}$.

23. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\mathrm{d}x$.

24. $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\mathrm{d}x$.

3) Знаменник має комплексні різні корені.

25. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$.

26. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$.

27. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3-1}$.

28. $\int \frac{(2x^2-3x-3)\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2-2x+5)}$.

29. $\int \frac{(x^4+1)\,\mathrm{d}x}{x^3-x^2+x-1}$.

30. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1-x^4}$.

31. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

32. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

33. $\int \frac{(3x^2+x+3)\,\mathrm{d}x}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

34. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,\mathrm{d}x$.

35. $\int \frac{(x^3-6)\,\mathrm{d}x}{x^4+6x^2+8}$.

36. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

4) Знаменник має комплексні кратні корені.

37. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

38. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$.

39. $\int \frac{(5x^2-12)\,\mathrm{d}x}{(x^2-6x+13)^2}$.

40. $\int \frac{(x+1)^4\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^3}$.

41. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9)^3}$.

42. $\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)^2}$.

43. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^4}$.

44. $\int \frac{x^9\,\mathrm{d}x}{(x^4-1)^2}$.

5) Метод Остроградського.

45. $\int \frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

46. $\int \frac{(4x^2-8x)\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$.

47. $\int \frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}\,\mathrm{d}x$.

48. $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

49. $\int \frac{(x^2-1)^2\,\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)^3}$.

50. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4(x^3+1)^2}$.

51. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+10)^3}$.

52. $\int \frac{(x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^3}$.

53. $\int \frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$.

54. $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

55. $\int \frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$.

56. $\int \frac{9\,\mathrm{d}x}{5x^2(3-2x^2)^3}$.

Розрахункові завдання

Задача 5. Знайти інтеграли.

1. **а)** $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}\,\mathrm{d}x$;

б) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$;

в) $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

2. **а)** $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x$;

б) $\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$;

в) $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$.

3. **а)** $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$;

б) $\int \frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$;

в) $\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}\,\mathrm{d}x$.

4. **а)** $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$;

б) $\int \frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$;

в) $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}\,\mathrm{d}x$.

5. **а)** $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$;

б) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$;

в) $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$.

6. **а)** $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x}\,\mathrm{d}x$;

б) $\int \frac{x^3-6x^2+14x-6}{(x+1)(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$;

в) $\int \frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x-2)^2(x^2-x+1)}\,\mathrm{d}x$.

7. **а)** $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)x^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$.

8. **а)** $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{2x^3+x+1}{(x+1)x^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$.

9. **а)** $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$.

10. **а)** $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}\,\mathrm{d}x$.

11. **а)** $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3+6x^2+14x+4}{(x-2)(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{3x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$.

12. **а)** $\int \frac{2x^4-5x^2-8x-8}{x(x-2)(x+2)}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}\,\mathrm{d}x$.

13. **а)** $\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+2}{x(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3+6x^2+15x+2}{(x-2)(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}\,\mathrm{d}x$.

14. **а)** $\int \frac{x^5-x^4-6x^3+13x+6}{x(x-3)(x+2)}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$.

15. **а)** $\int \frac{2x^4+2x^3-3x^2+2x-9}{x(x-1)(x+3)}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

16. **а)** $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$.

17. **а)** $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

18. **а)** $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{x^2+x+3}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

19. **а)** $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}\,\mathrm{d}x$.

20. **а)** $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}\,\mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$.

21. а) $\int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} \mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 7}{(x+1)(x-2)^3} \mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} \mathrm{d}x$.

22. а) $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)x} \mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 10}{(x+1)(x-2)^3} \mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{2x^3 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} \mathrm{d}x$.

23. а) $\int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x} \mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{3x^3 + 9x^2 + 10x + 2}{(x-1)(x+1)^3} \mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{x + 4}{(x^2 + x + 2)(x^2 + 2)} \mathrm{d}x$.

24. а) $\int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} \mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 4}{(x+2)(x+1)^3} \mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{3x^3 + 7x^2 + 12x + 6}{(x^2 + x + 3)(x^2 + 2x + 3)} \mathrm{d}x$.

25. а) $\int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} \mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x-2)(x+1)^3} \mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} \mathrm{d}x$.

26. а) $\int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 9}{(x+3)(x-1)x} \mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x-2)(x+2)^3} \mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{4x^2 + 3x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} \mathrm{d}x$

27. а) $\int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} \mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 18x - 4}{(x-2)(x+2)^3} \mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} \mathrm{d}x$.

28. а) $\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)} \mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 4}{(x+2)(x-2)^3} \mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} \mathrm{d}x$.

29. а) $\int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} \mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x-2)(x-1)^3} \mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} \mathrm{d}x$.

30. а) $\int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} \mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{x^3 + 6x^2 - 10x + 52}{(x-2)(x+2)^3} \mathrm{d}x$.

в) $\int \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} \mathrm{d}x$.

§ 7. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Основні поняття і теореми
[2, с. 355 357; 8, с. 217 – 220; 9, с. 337 – 341]

Нагадуємо, *одночленом* (*мономом*) називається алгебраїчний вираз, який містить тільки дії множення і піднесення до степеня чисел і букв. Числовий множник, що стоїть перед буквеними множниками, називається коефіцієнтом. Сума степенів буквених множників називається степенем монома. Наприклад, моном $\frac{4}{5}x^2 \cdot y^2 \cdot z$ має степінь 5.

Алгебраїчна сума кількох одночленів називається *многочленом* або *поліномом* (не обов'язково однієї змінної). Степінь многочлена визначається як старший степінь мономів, з яких складено цей многочлен.

Алгебраїчні вирази, складені із чисел і букв за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з натуральним показником, називаються раціональними алгебраїчними виразами.

Наприклад, раціональною функцією від двох аргументів x та y називається вираз виду

$$R(x;\, y) = \frac{P(x;\, y)}{Q(x;\, y)},$$

в якому через $P(x;\, y)$ і $Q(x;\, y)$ позначено довільні многочлени від двох аргументів x та y.

Виділимо таке просте твердження:
якщо $R(x;\, y)$ – раціональна функція двох змінних x і y, а $R_1(t)$, $R_2(t)$, $R_3(t)$ – три довільні раціональні функції від однієї змінної t, то вираз

$$R_4(t) = R\left[R_1(t),\, R_2(t)\right] \cdot R_3(t)$$

є *раціональною* функцією змінної t.

Заміна під знаком інтеграла, яка приводить початковий вираз до інтегрування раціонального дробу, називається *спеціальною раціоналізуючою підстановкою*.

Дробово-лінійною ірраціональністю будемо називати функцію виду

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

де a, b, c, d – деякі сталі, n – натуральне число.

Ірраціональність виду

$$R\left(x,\, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right), \text{ де } \frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s} \text{ – раціональні числа,}$$

прийнято називати *найпростішою*.

Лінійною ірраціональністю називають вираз виду

$$R\left(x,\,(ax+b)^{\frac{m}{n}},...,(ax+b)^{\frac{r}{s}}\right),$$

де a, b – деякі сталі; m, n,..., r, s – натуральні числа.

Інтеграли виду

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)\mathrm{d}\,x$$

інтегруються в елементарних функціях за допомогою раціоналізуючої підстановки

$$t=\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} \text{ або } t^k=\frac{ax+b}{cx+d},$$

де k – спільний знаменник дробів $\dfrac{m}{n},...,\dfrac{r}{s}$.

Окремо розглянемо інтегрування біноміальних диференціалів. Вираз $x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}\,x$, $(a\neq 0\,, b\neq 0)$ називається *біноміальним диференціалом*. Числа a, b, m, n, p – дійсні.

Одному із засновників сучасної московської школи математиків, видатному вченому Пафнутію Львовичу Чебишеву (1821 – 1894) належить така **теорема:**

Інтеграл від біноміального диференціала

$$\int x^m\cdot(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}\,x$$

може бути зінтегрований в елементарних функціях шляхом раціоналізуючої заміни тільки для раціональних m, n, p *і в одному з трьох випадків*:

1. *Нехай* p *– ціле. Тоді* $x=t^k$, *де* k *– спільний знаменник* m *і* n.
2. *Нехай* $\dfrac{m+1}{n}$ *– ціле. Тоді* $a+bx^n=t^k$, *де* k *– знаменник дробу* p.
3. *Нехай* $\dfrac{m+1}{n}+p$ *– ціле. Тоді* $ax^{-n}+b=t^k$, *де* k *– знаменник дробу* p.

Зауважимо, що вказані три випадки в теоремі Чебишева відповідають випадкам найпростішої, лінійної та дробово-лінійної ірраціональностей.

Контрольні питання і завдання

1. Запишіть загальний вигляд многочлена змінних x і y степені $n=2;3;4$.

2. Покажіть, що заміна змінної $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ буде раціоналізуючою для ірраціональності

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}\,x.$$

3. Запишіть раціоналізуючі підстановки для кожного з прикладів і виконайте заміну змінної:

а) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; **б)** $\int \frac{\sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+5}}$; **в)** $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

4. Покажіть, що заміна $\frac{x-a}{x-b} = t^n$ є раціоналізуючою для ірраціональності

$$\int R\left(x, (x-a)^{\frac{p}{n}}, (x-b)^{\frac{q}{n}} \right) \mathrm{d}x,$$

де p, q, n, k – цілі числа такі, що $p+q = k \cdot n$.

5. Запишіть нижченаведені інтеграли у вигляді біноміальних диференціалів, спробуйте вказати відповідну заміну

а) $\int \sqrt{x^3 + x^4}\,\mathrm{d}x$; **б)** $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\mathrm{d}x$; **в)** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

Зразки розв’язування задач

Приклад 1. Інтегрування найпростіших ірраціональностей.

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

Розв’язок. Подамо інтеграл у вигляді $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$. Найменшим спільним кратним дробів $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ і $\frac{1}{2}$ є 6, тобто під інтегралом вираз, раціональний відносно $x^{\frac{1}{6}}$. Тому виконаємо заміну

$$I = \int \frac{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2}{\left(x^{\frac{2}{6}}\right)^4 - \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x^{\frac{1}{6}} = y, \\ x = y^6, \\ \mathrm{d}x = 6y^5\,\mathrm{d}y \end{array} \right| = \int \frac{y^2}{y^4 - y^3} 6y^5\,\mathrm{d}y = 6\int \frac{y^7}{y^3(y-1)}\mathrm{d}y =$$

$$= 6\int \frac{y^4}{y-1}\mathrm{d}y =$$

$$
= \left| \begin{array}{l} \text{Виділимо цілу частину} \\ \begin{array}{r|l} y^4 & y-1 \\ \hline -\;\; y^4 - y^3 & y^3+y^2+y+1 \\ -\;\; y^3 & \\ y^3 - y^2 & \\ -\;\; y^2 & \\ y^2 - y & \\ -\;\; y & \\ y-1 & \\ 1 & \end{array} \end{array} \right| =
$$

$$
= 6\int\left(y^3 + y^2 + y + 1 + \frac{1}{y-1}\right)\mathrm{d}y = 6\left(\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1|\right) + C =
$$

$$
= \left| y = x^{\frac{1}{6}} \right| = 6\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right|\right) + C\,.
$$

Приклад 2. Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей.

$$
I = \int\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\,\mathrm{d}x\,.
$$

Розв'язок. Підстановка $\dfrac{5-3x}{4+7x} = y^2$. Визначимо звідси x та $\mathrm{d}x$.

$5 - 3x = 4y^2 + 7xy^2$; $5 - 4y^2 = 3x + 7xy^2$; $5 - 4y^2 = (3 + 7y^2)x$;

$x = \dfrac{5-4y^2}{7y^2+3}$; $\mathrm{d}x = \dfrac{-8y(7y^2+3) - 14y(5-4y^2)}{(7y^2+3)^2}\mathrm{d}y$; $\mathrm{d}x = \dfrac{-94y}{(7y^2+3)^2}\mathrm{d}y$.

Тому

$$
I = \int y\frac{-94y}{(7y^2+3)^2}\mathrm{d}y = -94\int\frac{y^2}{(7y^2+3)^2}\mathrm{d}y =
$$

Проінтегруємо частинами

$$
= \left| \begin{array}{ll} u = y; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}y; \\ \mathrm{d}v = \dfrac{y}{(7y^2+3)^2}\mathrm{d}y; & v = -\dfrac{1}{14}\cdot\dfrac{1}{7y^2+3} \end{array} \right| =
$$

$$
= -94\left(-\frac{1}{14}\cdot\frac{y}{7y^2+3} + \frac{1}{14}\int\frac{\mathrm{d}y}{7y^2+3}\right) =
$$

$$=-94\left(-\frac{1}{14}\frac{y}{7y^2+3}+\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}y}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{47}{7}\cdot\frac{y}{7y^2+3}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{3}}y+C=\left|y=\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{(5-3x)(4+7x)}}{7}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\right)+C.$$

Приклад 3. Інтегрування біноміальних диференціалів (другий випадок).

$$I=\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

Розв'язок. Запишемо підінтегральний вираз у вигляді біноміального диференціала

$$I=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=\int x^m(ax^n+b)^p\,\mathrm{d}x.$$

Звідси $m=-\dfrac{1}{2}$; $n=\dfrac{1}{4}$; $p=\dfrac{1}{3}$.

Обчислимо: $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2$ – ціле число.

Отже, ми маємо другий випадок інтегрованості біноміальних диференціалів за теоремою Чебишева. Підстановка запишеться так:

$$1+x^{\frac{1}{4}}=y^3;\ y=\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}};\ x^{\frac{1}{4}}=y^3-1;\ x=(y^3-1)^4;$$

$$x^{-\frac{1}{2}}=\left((y^3-1)^4\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{(y^3-1)^2};\ \mathrm{d}x=4(y^3-1)^3 3y^2\,\mathrm{d}y=12(y^3-1)^3y^2\,\mathrm{d}y.$$

Тому

$$I=\int\frac{1}{(y^3-1)^2}y\cdot12(y^3-1)^3y^2\,\mathrm{d}y=12\int y^3(y^3-1)\,\mathrm{d}y=12\int(y^6-y^3)\,\mathrm{d}y=$$

$$=12\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^4}{4}\right)+C=12y^4\left(\frac{y^3}{7}-\frac{1}{4}\right)+C=\left|y=\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}\right|=$$

$$=12\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}\left(\frac{1+\sqrt[4]{x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.$$

Приклад 4. Інтегрування біноміальних диференціалів (третій випадок).

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2+3x^2)^3}}.$$

Розв'язок. Запишемо інтеграл у вигляді $I = \int (2+3x^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$.

Тоді $m=0$; $n=2$; $p=-\dfrac{3}{2}$.

Обчислимо

$\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2} \notin Z$;

$\dfrac{m+1}{n} + p = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} = -1 \in Z$ – маємо третій випадок інтегрованості.

Підстановка виглядає так:

$2x^{-2} + 3 = y^2$.

Звідси випливає, що $-2 \cdot 2x^{-3}\,\mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$; $x^{-3}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}y\,\mathrm{d}y$.

Перетворимо підінтегральний вираз

$$\left(2+3x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \left(x^2\left(\frac{2}{x^2}+3\right)\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = x^{-3}(2x^{-2}+3)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}y^{-2}\,\mathrm{d}y.$$

Тому

$$I = -\frac{1}{2}\int y^{-2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\frac{y^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{2y} + C = \left| y = (2x^{-2}+3)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2+3x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2+3x^2}} + C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

В задачах 1 – 22 знайти інтеграли

1) функції виду $R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \sqrt[p]{\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \ldots\right)$:

1. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}$.

2. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$.

3. $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}$.

4. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

5. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$.

6. $\displaystyle\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,\mathrm{d}x$.

7. $\displaystyle\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

8. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

2) диференціальні біноми $x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$:

9. $\displaystyle\int\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,\mathrm{d}x$.

10. $\displaystyle\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}\mathrm{d}x$.

11. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

12. $\displaystyle\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,\mathrm{d}x$.

13. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

14. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

15. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,\mathrm{d}x$.

16. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

17. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,\mathrm{d}x$.

18. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

19. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

20. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

21. $\displaystyle\int\sqrt[3]{x(1-x^2)}\,\mathrm{d}x$.

22. $\displaystyle\int\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$.

Розрахункові завдання

Задача 6. Знайти інтеграли.

1. **а)** $\int \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\cdot\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x$.

2. **а)** $\int \frac{4\sqrt{1-x}-\sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1}+4\sqrt{1-x})(3x+1)^2}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

3. **а)** $\int \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^9\cdot\sqrt{x^8}}\,\mathrm{d}x$.

4. **а)** $\int e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}$. **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2\cdot\sqrt[9]{x}}\,\mathrm{d}x$.

5. **а)** $\int \frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}-7x-6\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

6. **а)** $\int \frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x\cdot\sqrt[8]{x^7}}\,\mathrm{d}x$.

7. **а)** $\int \frac{(4\sqrt{x-1}-\sqrt{2x+1})\,\mathrm{d}x}{(\sqrt{2x+1}+4\sqrt{1-x})(2x+1)^2}$. **б)** $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2\cdot\sqrt[6]{x}}\,\mathrm{d}x$.

8. **а)** $\int \frac{\sqrt[3]{3x+5}+2}{1+\sqrt[3]{3x+5}}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

9. **а)** $\int \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x\cdot\sqrt[10]{x^9}}\,\mathrm{d}x$.

10. **а)** $\int \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2\cdot\sqrt[5]{x}}\,\mathrm{d}x$.

11. **а)** $\int e^{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(2+x)\sqrt{4-x^2}}$. **б)** $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\cdot\sqrt[25]{x^{11}}}\,\mathrm{d}x$.

12. **а)** $\int \frac{\sqrt{x+25}\,\mathrm{d}x}{(x+25)^2\sqrt{x+1}}$. **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

13. **а)** $\int \frac{(4\sqrt{2-x}-\sqrt{2x+2})\,\mathrm{d}x}{(\sqrt{2x+2}+4\sqrt{2-x})(2x+2)^2}$. **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[9]{x^4}}\,\mathrm{d}x$.

14. **а)** $\int \frac{e^{\sqrt{(3-x)/(3+x)}}\,\mathrm{d}x}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}$. **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\cdot\sqrt[9]{x^5}}\,\mathrm{d}x$.

15. **а)** $\int \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}\,\mathrm{d}x$. **б)** $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\cdot\sqrt[6]{x^5}}\,\mathrm{d}x$.

16. а) $\int\sqrt{\frac{6-x}{x-14}}\,\mathrm{d}x$. б) $\int\frac{\sqrt{1+x}}{x^2\cdot\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

17. а) $\int\frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. б) $\int\frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x\cdot\sqrt[12]{x^7}}\,\mathrm{d}x$.

18. а) $\int e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$. б) $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\cdot\sqrt[8]{x}}\,\mathrm{d}x$.

19. а) $\int\sqrt{\frac{6-x}{x-18}}\,\mathrm{d}x$. б) $\int\frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2\cdot\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$.

20. а) $\int\frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$. б) $\int\frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x\cdot\sqrt[5]{x^3}}\,\mathrm{d}x$.

21. а) $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{2+\sqrt{2x+1}}$. б) $\int\frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2\cdot\sqrt[20]{x^7}}\,\mathrm{d}x$.

22. а) $\int\frac{(4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+2})\,\mathrm{d}x}{(\sqrt{3x+2}+4\sqrt{2-x})(3x+2)^2}$. б) $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\cdot\sqrt[5]{x}}\,\mathrm{d}x$.

23. а) $\int\sqrt{\frac{4-x}{x-12}}\,\mathrm{d}x$. б) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\cdot\sqrt[15]{x}}\,\mathrm{d}x$.

24. а) $\int e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}}\frac{\mathrm{d}x}{(5+x)\sqrt{25-x^2}}$. б) $\int\frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2\cdot\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

25. а) $\int\frac{(2+\sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x}{(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\sqrt{x}}$. б) $\int\frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x\cdot\sqrt[12]{x^5}}\,\mathrm{d}x$.

26. а) $\int\frac{(4\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1})\,\mathrm{d}x}{(\sqrt{x+1}+4\sqrt{1-x})(x+1)^2}$. б) $\int\frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\cdot\sqrt[6]{x^5}}\,\mathrm{d}x$.

27. а) $\int\frac{e^{\sqrt{(6-x)/(6+x)}}\,\mathrm{d}x}{(6+x)\sqrt{36-x^2}}$. б) $\int\frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[5]{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

28. а) $\int\sqrt{\frac{2-x}{x-6}}\,\mathrm{d}x$. б) $\int\frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

29. а) $\int\frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. б) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

30. а) $\int\frac{(4\sqrt{2-x}-\sqrt{x+2})\,\mathrm{d}x}{(\sqrt{x+2}+4\sqrt{x-2})(x+2)^2}$. б) $\int\frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[12]{x^5}}\,\mathrm{d}x$.

§ 8. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Основні поняття і теореми
[2, с. 358 – 363; 8, с. 220 – 221; 9, с. 341 – 345]

Інтеграл виду

$$\int R(\cos x,\ \sin x)\,\mathrm{d}x,$$

де $R(u, v)$ – раціональна функція, завжди інтегрується в елементарних функціях за допомогою раціоналізуючої, і саме тому *універсальної підстановки* $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$:

$$\int R(\cos x,\ \sin x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2};\ x = 2\,\mathrm{arctg}\,t; \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}; \\ \mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Слід відзначити, що в багатьох випадках універсальна тригонометрична підстановка зводить обчислення інтегралів до дуже громіздких раціональних функцій. Тому в ряді випадків слід користуватися іншими спеціальними тригонометричними підстановками. В цьому аспекті корисна така т**еорема:**

Нехай $R(u, v)$ – раціональна функція. Тоді:

1) Якщо $R(-u, v) \equiv R(u, v)$ парна по першому аргументу, то $R(u, v) \equiv R_1(u^2, v)$.

2) Якщо $R(-u, v) \equiv -R(u, v)$ непарна по першому аргументу, то $R(u, v) \equiv R_2(u^2, v)\cdot u$.

3) Якщо $R(-u, -v) \equiv R(u, v)$ парна по двох аргументах одночасно, то $R(u, v) \equiv R_3\left(\dfrac{u}{v}, v^2\right)$.

Наведемо деякі спеціальні тригонометричні підстановки.

А) У випадку виконання рівності $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$:

$\int R(\sin x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int R_1(\cos x, \sin^2 x)\cdot \underline{\sin x\,\mathrm{d}x}$ – раціоналізуюча підстановка $t = \cos x$.

В) У випадку виконання рівності $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x; \sin x)$:

$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int R_1(\cos^2 x, \sin x)\cdot \underline{\cos x\,\mathrm{d}x}$ – раціоналізуюча підстановка $t = \sin x$.

С) У випадку виконання рівності $R(-\cos x; -\sin x) = R(\cos x; \sin x)$:

$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int R_1(\cos^2 x, \operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x$ – раціоналізуюча підстановка $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \operatorname{ctg} x$.

Зауваження 1. При обчисленні інтегралів виду

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,\mathrm{d}x, \text{ де } m,\ n \text{ – цілі числа,}$$

інколи зручно користуватися тригонометричними формулами зниження степеня $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ та $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

Зауваження 2. Інтеграли виду

$$\int \sin ax \cdot \cos bx\,\mathrm{d}x,\ \int \sin ax \cdot \sin bx\,\mathrm{d}x,\ \int \cos ax \cdot \cos bx\,\mathrm{d}x$$

обчислюють за допомогою тригонометричних формул

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)].$$

Контрольні питання і завдання

1. Запишіть інтеграл $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,\mathrm{d}x$ у вигляді біноміального диференціала, виконавши заміну $t = \sin x$.

2. Зінтегруйте $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$, $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$, $\int \sin^{2n+1} x \cdot \cos^m x\,\mathrm{d}x$.

3. Обчисліть $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ та $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

4. Обґрунтуйте необхідність застосування універсальної підстановки і виконайте її

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{7 + 2\sin x + 3\cos x}.$$

5. Обчисліть інтеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 \cdot \cos^2 x + b^2 \cdot \sin^2 x},\ a \neq 0,\ b \neq 0.$$

6. Доведіть, що

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x}\,\mathrm{d}x = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C,$$

де A, B, C – сталі, $x \neq \pi k - \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$.

Зразки розв’язування задач

Приклад 1. Підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$ або $\cos x$.

$$I=\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x.$$

Розв’язок. Оскільки $\dfrac{(-\sin x)^5}{\cos^4 x}=-\dfrac{\sin^5 x}{\cos^4 x}$, то підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, отже проводимо заміну $z=\cos x$.

$$I=\int\frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^4 x}\underline{\sin x\,\mathrm{d}x}=-\int\frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^4 x}\mathrm{d}\cos x=\left|\cos x=z\right|=-\int\frac{(1-z^2)^2}{z^4}\mathrm{d}z=$$

$$=-\int\frac{1-2z^2+z^4}{z^4}\mathrm{d}z=-\int\left(\frac{1}{z^4}-\frac{2}{z^2}+1\right)\mathrm{d}z=-\left(-\frac{1}{3z^3}+\frac{2}{z}+z\right)+C=\left|z=\cos x\right|=$$

$$=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{2}{\cos x}-\cos x+C.$$

Приклад 2. Підінтегральна функція парна одночасно по $\sin x$ і $\cos x$.

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos^5 x}.$$

Розв’язок. Оскільки $\dfrac{1}{(-\sin x)^3(-\cos x)^5}=\dfrac{1}{(-\sin^3 x)(-\cos^5 x)}=\dfrac{1}{\sin^3 x\cos^5 x}$, то підінтегральна функція парна одночасно по $\sin x$ і $\cos x$. Рекомендована заміна $\mathrm{tg}\,x=z$.

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cos^3 x\cos^5 x}=\int\frac{1}{\mathrm{tg}^3 x}\cdot\frac{1}{\cos^6 x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int\frac{1}{\mathrm{tg}^3 x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^3\mathrm{d}\mathrm{tg}\,x=$$

$$=\int\frac{(\mathrm{tg}^2 x+1)^3}{\mathrm{tg}^3 x}\mathrm{d}\mathrm{tg}\,x=\left|\mathrm{tg}\,x=z\right|=\int\frac{(z^2+1)^3}{z^3}\mathrm{d}z=\int\frac{z^6+3z^4+3z^2+1}{z^3}\mathrm{d}z=$$

$$=\int\left(z^3+3z+\frac{3}{z}+\frac{1}{z^3}\right)\mathrm{d}z=\frac{1}{4}z^4+\frac{3}{2}z^2+3\ln|z|-\frac{1}{2z^2}+C=\left|z=\mathrm{tg}\,x\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x+\frac{3}{2}\mathrm{tg}^2 x+3\ln|\mathrm{tg}\,x|-\frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2 x}+C=\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x+\frac{3}{2}\mathrm{tg}^2 x+3\ln|\mathrm{tg}\,x|-$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2 x+C.$$

Приклад 3. Підінтегральна функція парна одночасно по $\sin x$ і $\cos x$.

$$\int \mathrm{ctg}^5 x\,\mathrm{d}x .$$

Розв'язок.

$$\int \mathrm{ctg}^5 x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l}\mathrm{ctg} = z;\\ \mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}z}{1+z^2}\end{array}\right| = -\int \frac{z^5}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \left|\begin{array}{l}\text{Виділимо цілу частину}\\ \begin{array}{rr|l} - & z^5 & z^2+1 \\ \cline{3-3} & \underline{z^5+z^3} & z^3 - z \\ - & -z^3 & \\ & \underline{-z^3-z} & \\ & z & \end{array}\end{array}\right| =$$

$$= -\int\left(z^3 - z + \frac{z}{z^2+1}\right)\mathrm{d}z = -\frac{z^4}{4} + \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(z^2+1) + C = \left|z = \mathrm{ctg}\,x\right| =$$

$$= -\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{4} + \frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln(\mathrm{ctg}^2 x + 1) + C = -\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{4} + \frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sin^2 x} + C =$$

$$= -\frac{\mathrm{ctg}^4 x}{4} + \frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2} + \ln\left|\sin x\right| + C .$$

Приклад 4. Універсальна тригонометрична підстановка.

$$I = \int \frac{5 + 6\sin x}{\sin x(4 + 3\cos x)}\,\mathrm{d}x .$$

Розв'язок. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = z$; $\sin x = \dfrac{2z}{1+z^2}$; $\cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$; $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}z}{1+z^2}$.

$$I = \int \frac{5 + \dfrac{12z}{1+z^2}}{\dfrac{2z}{1+z^2}\left(4 + \dfrac{3(1-z^2)}{1+z^2}\right)} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}z}{1+z^2} = \int \frac{5z^2 + 12z + 5}{z(z^2+7)}\,\mathrm{d}z .$$

Розкладемо на найпростіші дріб, що стоїть під інтегралом:

$$\frac{5z^2 + 12z + 5}{z(z^2+7)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{z^2+7} = \frac{A(z^2+7) + z(Bz + C)}{z(z^2+7)} .$$

Застосовуючи, наприклад, метод невизначених коефіцієнтів, знайдемо, що $A = \dfrac{5}{7}$; $B = \dfrac{30}{7}$; $C = 12$. Тому

$$I=\int\left(\frac{\frac{5}{7}}{z}+\frac{\frac{30}{7}z+12}{z^2+7}\right)\mathrm{d}z=\frac{5}{7}\ln|z|+\frac{15}{7}\ln(z^2+7)+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=\left|z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|=\frac{5}{7}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{15}{7}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+7\right)+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Приклад 5. Застосування універсальної тригонометричної підстановки в деяких спеціальних випадках.

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}.$$

Розв'язок. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$; $\mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}z}{1+z^2}$.

$$I=\int\frac{\frac{2\,\mathrm{d}z}{1+z^2}}{\frac{8z^3}{(1+z^2)^3}}=\frac{1}{4}\int\frac{(1+z^2)^2}{z^3}\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\int\frac{z^4+2z^2+1}{z^3}\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\int\left(z+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^3}\right)\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{1}{8}z^2+\frac{1}{2}\ln|z|-\frac{1}{8}z^{-2}+C=\left|z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|=\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

1. $\int\sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

2. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

3. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sin^3 x}$.

4. $\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

5. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x\sin^3 x}$.

6. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x\cos^4 x}$.

7. $\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(1-\cos x)^2}$.

8. $\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(1-\cos x)^2}$.

9. $\int\cos^6 x\,\mathrm{d}x$.

10. $\int\operatorname{ctg}^4 x\,\mathrm{d}x$.

11. $\int\operatorname{tg}^5 x\,\mathrm{d}x$.

12. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg}^8 x}$.

13. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}$.

14. $\int\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

15. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)^2}$.

16. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$.

17. $\int \frac{dx}{5\cos x - 2\sin x}$.

18. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos 2x}$.

19. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin x \cos 3x}$.

20. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$.

21. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$.

22. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$.

23. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$.

24. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{1 - \operatorname{tg} x}$.

25. $\int \frac{dx}{4 + \operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} x}$.

26. $\int \frac{dx}{(\sin x + 2\sec x)^2}$.

27. $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$.

28. $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$.

29. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$.

30. $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}$.

31. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$.

32. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$.

33. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$.

34. $\int \sqrt{1 + \sin x}\, dx$.

35. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x} dx$.

36. $\int \frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x} dx$.

37. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^4 x}}$.

39. $\int \sqrt{1 + \operatorname{cosec} x}\, dx$.

40. $\int \frac{(\cos 2x - 3)\, dx}{\cos^4 x \sqrt{4 - \operatorname{ctg}^2 x}}$.

41. $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \sqrt{\cos^3 \frac{x}{2}}}$.

42. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$.

Розрахункові завдання

Задача 7. Знайти інтеграли.

1. **а)** $\int \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)}$.

б) $\int \frac{8 + \operatorname{tg} x}{18\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$.

в) $\int 2^8 \sin^8 x\, dx$.

2. **а)** $\int \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \cos x)}$.

б) $\int \frac{2\operatorname{ctg} x + 1}{(2\sin x + \cos x)^2} dx$.

в) $\int 2^4 \sin^6 x \cos^2 x\, dx$.

3. а) $\int \frac{\cos x - \sin x}{(1+\sin x)^2} \mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{6\,\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x}{3\sin 2x + 5\cos^2 x}$.

в) $\int \sin^4 x \cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

4. а) $\int \frac{\cos x - \sin x}{(1+\sin x)^2} \mathrm{d}x$.

б) $\int \frac{4\,\mathrm{tg}\,x - 5}{1 - \sin 2x + 4\cos^2 x} \mathrm{d}x$.

в) $\int \sin^2(x/4)\cos^6(x/4)\,\mathrm{d}x$.

5. а) $\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{5 + 4\cos x}$.

б) $\int \frac{3\,\mathrm{tg}\,x + 1}{2\sin 2x - 5\cos 2x + 1} \mathrm{d}x$.

в) $\int 2^4 \cos^8(x/2)\,\mathrm{d}x$.

6. а) $\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1 + \sin x - \cos x}$.

б) $\int \frac{\mathrm{tg}\,x + 2}{\sin^2 x + 2\cos^2 x - 3} \mathrm{d}x$.

в) $\int 2^8 \sin^8 x\,\mathrm{d}x$.

7. а) $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1 + \cos x + \sin x}$.

б) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(3\,\mathrm{tg}\,x + 5)\sin 2x}$.

в) $\int 2^8 \sin^6 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

8. а) $\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1 + \cos x + \sin x}$.

б) $\int \frac{2\,\mathrm{tg}^2 x - 11\,\mathrm{tg}\,x - 22}{4 - \mathrm{tg}\,x} \mathrm{d}x$.

в) $\int 2^4 \sin^4 x \cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

9. а) $\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1 + \cos x - \sin x}$.

б) $\int \frac{3 + 2\,\mathrm{tg}\,x}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x - 1} \mathrm{d}x$.

в) $\int \sin^2 x \cos^6 x\,\mathrm{d}x$.

10. а) $\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$.

б) $\int \frac{1 + \mathrm{ctg}\,x}{(\sin x + 2\cos x)^2} \mathrm{d}x$.

в) $\int \cos^8(x/4)\,\mathrm{d}x$.

11. а) $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^2}$.

б) $\int \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sin^2 x - 5\cos^2 x + 4} \mathrm{d}x$.

в) $\int 2^4 \sin^8(x/2)\,\mathrm{d}x$.

12. а) $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$.

б) $\int \frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x - 4} \mathrm{d}x$.

в) $\int 2^8 \sin^6 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

13. а) $\int \frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$.

б) $\int \frac{4 + \mathrm{tg}\,x}{2\sin^2 x + 18\cos^2 x} \mathrm{d}x$.

в) $\int 2^8 \sin^4 x \cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

14. а) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1 + \sin x)}$.

б) $\int \frac{12 + \mathrm{tg}\,x}{3\sin^2 x + 12\cos^2 x} \mathrm{d}x$.

в) $\int 2^4 \sin^2 x \cos^6 x\,\mathrm{d}x$.

15. а) $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2 + \sin x}$.

б) $\int \frac{6 + \mathrm{tg}\,x}{9\sin^2 x + 4\cos^2 x} \mathrm{d}x$.

в) $\int \cos^8 x\,\mathrm{d}x$.

16. а) $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{5 + 3\sin x}$.

б) $\int \frac{\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x - 7}$.

в) $\int \sin^8(x/4)\,\mathrm{d}x$.

17. а) $\int \frac{\cos x\,dx}{2+\cos x}$.

б) $\int \frac{7+3\,\mathrm{tg}\,x}{(\sin x+2\cos x)^2}dx$.

в) $\int 2^4\sin^6(x/2)\cos^2(x/2)\,dx$.

18. а) $\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\cos x)^3}$.

б) $\int \frac{2\,\mathrm{tg}\,x+5}{(5-\mathrm{tg}\,x)\sin 2x}dx$.

в) $\int 2^8\sin^4 x\cos^4 x\,dx$.

19. а) $\int \frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}$.

б) $\int \frac{3\,\mathrm{tg}^2 x-50}{2\,\mathrm{tg}\,x+7}dx$.

в) $\int 2^8\sin^2 x\cos^6 x\,dx$.

20. а) $\int \frac{dx}{(1+\sin x-\cos x)^2}$.

б) $\int \frac{5\,\mathrm{tg}\,x+2}{2\sin 2x+5}dx$.

в) $\int 2^4\cos^8 x\,dx$.

21. а) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$.

б) $\int \frac{4\,\mathrm{tg}\,x-5}{4\cos^2 x-\sin 2x+1}dx$.

в) $\int \sin^8 x\,dx$.

22. а) $\int \frac{(1+\cos x)\,dx}{1+\cos x+\sin x}$.

б) $\int \frac{6\sin^2 x}{4+3\cos 2x}dx$.

в) $\int \sin^6(x/4)\cos^2(x/4)\,dx$.

23. а) $\int \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2}dx$.

б) $\int \frac{11-3\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,x+3}dx$.

в) $\int 2^4\sin^4(x/2)\cos^4(x/2)\,dx$.

24. а) $\int \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

б) $\int \frac{2\,\mathrm{tg}\,x-5}{(4\cos x-\sin x)^2}dx$.

в) $\int 2^8\sin^2 x\cos^6 x\,dx$.

25. а) $\int \frac{(1-\sin x)\,dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

б) $\int \frac{36\,dx}{(6-\mathrm{tg}\,x)\sin 2x}$.

в) $\int 2^8\cos^8 x\,dx$.

26. а) $\int \frac{\sin x\,dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$.

б) $\int \frac{4-7\,\mathrm{tg}\,x}{2+3\,\mathrm{tg}\,x}dx$.

в) $\int 2^4\sin^8 x\,dx$.

27. а) $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

б) $\int \frac{2-\mathrm{tg}\,x}{(\sin x+3\cos x)^2}dx$.

в) $\int \sin^6 x\cos^2 x\,dx$.

28. а) $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

б) $\int \frac{8\,\mathrm{tg}\,x\,dx}{3\cos^2 x+8\sin^2 x-7}$.

в) $\int \sin^4(x/4)\cos^4(x/4)\,dx$.

29. а) $\int \frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$.

б) $\int \frac{12\,dx}{(6+5\,\mathrm{tg}\,x)\sin 2x}$.

в) $\int 2^4\sin^2(x/2)\cos^6(x/2)\,dx$.

30. а) $\int \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

б) $\int \frac{\mathrm{tg}^2 x}{4+3\cos 2x}dx$.

в) $\int 2^8\cos^8 x\,dx$.

§ 9. ІНТЕГРУВАННЯ КВАДРАТИЧНИХ ІРРАЦІОНАЛЬНОСТЕЙ

Основні поняття і теореми
[9, с. 345 – 348; 11, с. 384 – 387; 12, с. 327 – 328]

Функцію виду $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ називають *квадратичною ірраціональністю*. Відомо, що інтеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$$

завжди раціоналізується однією із так званих підстановок Ейлера:

1) $b^2-4ac<0$ і $a>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\cdot\sqrt{a}$;

2) $b^2-4ac>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)\cdot(x-x_2)}=t(x-x_1)$.

Обчислення інтегралів за допомогою підстановки Ейлера звичайно призводить до громіздких виразів, тому ці підстановки слід застосовувати лише тоді, коли початковий інтеграл не вдається зінтегрувати іншим, більш коротким, шляхом.

Зауважимо, що $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c-\dfrac{b^2}{4a}$. Тому інтеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$$

за допомогою підстановки $t=x+\dfrac{b}{2a}$, $c-\dfrac{b^2}{4a}=\pm m^2$ зводиться до одного з трьох інтегралів $\int R(t, \sqrt{m^2-t^2})\,\mathrm{d}t$, $\int R(t, \sqrt{t^2-m^2})\,\mathrm{d}t$, $\int R(t, \sqrt{t^2+m^2})\,\mathrm{d}t$.

Для обчислення отриманих інтегралів досить часто виявляється зручним застосування тригонометричних або гіперболічних підстановок ($\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$, $\mathrm{ch}^2\varphi-\mathrm{sh}^2\varphi=1$):

А) $\int R(t,\sqrt{m^2-t^2})\,\mathrm{d}t=\begin{vmatrix} t=m\cdot\sin\varphi, \\ \mathrm{d}t=m\cdot\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\end{vmatrix}=m\cdot\int R(m\cdot\sin\varphi, m\cdot\cos\varphi)\cos\varphi\cdot\mathrm{d}\varphi$,

або $\int R(t,\sqrt{m^2-t^2})\,\mathrm{d}t=\begin{vmatrix} t=m\cdot\mathrm{th}\,\varphi, \\ \mathrm{d}t=\dfrac{m}{\mathrm{ch}^2\varphi}\mathrm{d}\varphi\end{vmatrix}=m\cdot\int R\left(m\cdot\mathrm{th}\,\varphi, \dfrac{m}{\mathrm{ch}\,\varphi}\right)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

В) $\int R(t,\sqrt{t^2-m^2})\,\mathrm{d}t=\begin{vmatrix} t=\dfrac{m}{\cos\varphi}, \\ \mathrm{d}t=m\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi\end{vmatrix}=m\int R\left(\dfrac{m}{\cos\varphi}, m\cdot\mathrm{tg}\,\varphi\right)\cdot\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$,

або $\int R(t,\sqrt{t^2-m^2})\,\mathrm{d}t=\begin{vmatrix} t=m\cdot\mathrm{ch}\,\varphi, \\ \mathrm{d}t=m\cdot\mathrm{sh}\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi\end{vmatrix}=m\cdot\int R(m\cdot\mathrm{ch}\,\varphi, m\cdot\mathrm{sh}\,\varphi)\cdot\mathrm{sh}\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi$.

С) $\int R(t, \sqrt{t^2+m^2})\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{l} t = m\cdot \mathrm{tg}\,\varphi, \\ \mathrm{d}t = \dfrac{m}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi \end{array} \right| = m\cdot\int R\left(m\cdot\mathrm{tg}\,\varphi, \dfrac{m}{\cos\varphi}\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi,$

або $\int R(t, \sqrt{t^2+m^2})\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{l} t = m\cdot \mathrm{sh}\,\varphi, \\ \mathrm{d}t = m\cdot\mathrm{ch}\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{array} \right| = m\cdot\int R(m\cdot\mathrm{sh}\,\varphi, m\cdot\mathrm{ch}\,\varphi)\cdot\mathrm{ch}\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$

Контрольні питання і завдання

1. Покажіть, що підстановка Ейлера: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}$, де $a<0$, $c>0$ ($ax^2+bx+c\ge 0$) раціоналізує інтеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x.$$

2. Як зміниться ситуація, коли в квадратичній ірраціональності $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ в умовах першої підстановки Ейлера використати заміну $t=\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}$?

3. Спробуйте довести, що інтеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ завжди можна звести до обчислення одного з трьох інтегралів такого виду:

$$\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x,\ \int\frac{\mathrm{d}x}{(x-x_0)^k\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x.$$

4. Розглянемо інтеграли виду

$\int R(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})\,\mathrm{d}x$ або $\int R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})\,\mathrm{d}x$. Відзначимо, що в загальному випадку ці інтеграли не будуть елементарними функціями. Якщо вказані інтеграли не виражаються через елементарні функції, то їх прийнято називати еліптичними. В іншому випадку – псевдоеліптичними. Французький математик Жозеф Ліувілль (1809 – 1882) показав, що еліптичні інтеграли можна записати (шляхом відповідної підстановки) в одному з трьох стандартних виглядів

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\ \int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\ \text{або}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+h\cdot t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\ (0<k<1).$$

В кожному з еліптичних інтегралів виконайте заміну $t=\sin\varphi$, запропоновану А.М. Лежандром. Ви повинні отримати:

1) $\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ – еліптичний інтеграл 1-го роду у формі Лежандра;

2) $\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$ – еліптичний інтеграл 2-го роду, який пов'язаний з обчисленням довжини дуги еліпса;

3) $\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+h\cdot\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2\varphi}}$ – еліптичний інтеграл 3-го роду.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. Підінтегральний вираз зводиться до вигляду $R(y,\sqrt{a^2-y^2})$.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{array}{l}x=\sin t,\\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{(\sin^2 t+4)\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{(\sin^2 t+4)\cos t}=$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t+4}=\int\frac{1}{1+\frac{4}{\sin^2 t}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t}=-\int\frac{1}{1+4(1+\mathrm{ctg}^2 t)}\mathrm{d}\,\mathrm{ctg}\,t=\left|\mathrm{ctg}\,t=z\right|=$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}z}{5+4z^2}=-\frac{1}{2\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{2z}{\sqrt{5}}+C=\left|z=\mathrm{ctg}\,t\right|=-\frac{1}{2\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{2\,\mathrm{ctg}\,t}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sin t=x,\\ \mathrm{ctg}\,t=\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\end{array}\right|=-\frac{1}{2\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{5}x}+C.$$

Приклад 2. Підінтегральний вираз зводиться до вигляду $R(y,\sqrt{a^2+y^2})$.

$$I=\int\frac{(x+4)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+4)\sqrt{x^2+2x+5}}=\int\frac{((x+1)+3)\,\mathrm{d}x}{((x^2+2x+1)+3)\sqrt{(x^2+2x+1)+4}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x+1=y,\\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}y\end{array}\right|=\int\frac{(y+3)\,\mathrm{d}y}{(y^2+3)\sqrt{y^2+4}}=\left|\begin{array}{l}y=2\,\mathrm{tg}\,t;\quad \mathrm{d}y=\frac{2\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t};\\ \sqrt{y^2+4}=\sqrt{4\,\mathrm{tg}^2 t+4}=\frac{2}{\cos t}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{2\,\mathrm{tg}\,t+3}{(4\,\mathrm{tg}^2 t+3)\frac{2}{\cos t}}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}=\int\frac{\left(2\frac{\sin t}{\cos t}+3\right)\frac{1}{\cos t}}{4\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+3}\mathrm{d}t=\int\frac{2\sin t+3\cos t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}\mathrm{d}t=$$

$$=2\int\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}+3\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}=2\int\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{4(1-\cos^2 t)+3\cos^2 t}+$$

$$+3\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{4\sin^2 t+3(1-\sin^2 t)}=2\int\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{4-\cos^2 t}+3\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t+3}=2\int\frac{\mathrm{d}\cos t}{\cos^2 t-4}+$$

$$+3\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t+3}=2\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos t-2}{\cos t+2}\right|+\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\left|\begin{array}{l} y=2\operatorname{tg}t;\ \operatorname{tg}t=\dfrac{y}{2}; \\ \sin t=\dfrac{y}{\sqrt{4+y^2}};\ \cos t=\dfrac{2}{\sqrt{4+y^2}} \end{array}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\dfrac{2}{\sqrt{4+y^2}}-2}{\dfrac{2}{\sqrt{4+y^2}}+2}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}\sqrt{4+y^2}}+$$

$$+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{4+y^2}}{1+\sqrt{4+y^2}}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}\sqrt{4+y^2}}+C=|y=x+1|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^2+2x+5}}{1+\sqrt{x^2+2x+5}}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+2x+5}}+C.$$

Інший шлях розв’язання пов’язаний з використанням гіперболічної підстановки.

Визначимо $\displaystyle\int\frac{(y+3)\,\mathrm{d}y}{(y^2+3)\sqrt{y^2+4}}$.

$$I=\left|\begin{array}{l} y=2\operatorname{sh}z; \\ \mathrm{d}y=2\operatorname{ch}z\,\mathrm{d}z \end{array}\right|=\int\frac{(2\operatorname{sh}z+3)2\operatorname{ch}z\,\mathrm{d}z}{(4\operatorname{sh}^2 z+3)\sqrt{4\operatorname{sh}^2 z+4}}=\int\frac{(2\operatorname{sh}z+3)2\operatorname{sh}z\,\mathrm{d}z}{(4\operatorname{sh}^2 z+3)2\operatorname{ch}z}=$$

$$=\int\frac{(2\operatorname{sh}z+3)\,\mathrm{d}z}{4\operatorname{sh}^2 z+3}=\left|\begin{array}{ll} \operatorname{th}\dfrac{z}{2}=t; & \operatorname{sh}z=\dfrac{2t}{1-t^2}; \\ \operatorname{ch}z=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}; & \mathrm{d}z=\dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} \end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{4t}{1-t^2}+3}{\dfrac{16t^2}{(1-t^2)^2}+3}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}=$$

$$=-2\int\frac{3t^2-4t-3}{3t^4+10t^2+3}\,\mathrm{d}t.$$

Розкладемо підінтегральний дріб на найпростіші, користуючись методом невизначених коефіцієнтів.

$$\frac{3t^2-4t-3}{3t^4+10t^2+3}=\frac{3t^2-4t-3}{(3t^2+1)(t^2+3)}=\frac{At+B}{3t^2+1}+\frac{Ct+D}{t^2+3}=$$

$$=\frac{(At+B)(t^2+3)+(Ct+D)(3t^2+1)}{(3t^2+1)(t^2+3)}=$$

$$=\frac{(A+3C)t^3+(B+3D)t^2+(3A+C)t+3B+D}{(3t^2+1)(t^2+3)}.$$

Маємо систему

$$\begin{cases} A+3C=0; \\ B+3D=3; \\ 3A+C=-4; \\ 3B+D=-3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{3}{2}; \\ B=-\frac{3}{2}; \\ C=\frac{1}{2}; \\ D=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Тоді

$$I=-2\int\left(\frac{-\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}}{3t^2+1}+\frac{\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}}{t^2+3}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{6t+6}{3t^2+1}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\frac{2t+6}{t^2+3}\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(3t^2+1)-\frac{1}{2}\ln(t^2+3)+3\int\frac{\mathrm{d}t}{3t^2+1}-3\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+3}=\frac{1}{2}\ln\frac{3t^2+1}{t^2+3}+$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\sqrt{3}t-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{th}\frac{z}{2}; \qquad \operatorname{sh}z=\frac{y}{2}; \qquad y=x+1; \qquad \operatorname{sh}z=\frac{x+1}{2}; \\ t=\operatorname{th}\frac{z}{2}=\frac{\operatorname{ch}z-1}{\operatorname{sh}z}=\frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 z+1}-1}{\operatorname{sh}z}=\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{x+1} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{3\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{x+1}\right)+1}{\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{x+1}\right)^2+3}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{x+1}-$$

$$-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{\sqrt{3}(x+1)}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+2x+7-3\sqrt{x^2+2x+5}}{x^2+2x+3-\sqrt{x^2+2x+5}}+$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{x+1}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-2}{\sqrt{3}(x+1)}+C.$$

Приклад 3. Підінтегральний вираз зводиться до вигляду $R(y,\sqrt{y^2-a})$.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}=\left|\begin{array}{l}x=\dfrac{\sqrt5}{\cos t};\ \mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt5\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t;\\ x^2-5=\dfrac{5}{\cos^2 t}-5=5\,\mathrm{tg}^2\,t\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{\sqrt5\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t}{5\,\mathrm{tg}^2\,t\sqrt5\,\mathrm{tg}\,t}=$$

$$=\frac15\int\frac{\dfrac{1}{\cos t}\mathrm{d}t}{\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\frac15\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}=\frac15\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin^2 t}=\frac15\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{\sin^2 t}=-\frac15\frac{1}{\sin t}+C=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{\cos t}=\dfrac{x}{\sqrt5};\quad \cos t=\dfrac{\sqrt5}{x};\\ \sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{x}\end{array}\right|=-\frac15\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}+C.$$

Інший варіант розв’язання цієї задачі полягає у використанні гіперболічної підстановки.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}=\left|\begin{array}{l}x=\sqrt5\,\mathrm{ch}\,z;\ \mathrm{d}x=\sqrt5\,\mathrm{sh}\,z\,\mathrm{d}z;\\ x^2-5=5\,\mathrm{ch}^2\,z-5=5\,\mathrm{sh}^2\,z.\end{array}\right|=\int\frac{\sqrt5\,\mathrm{sh}\,z\,\mathrm{d}z}{5\,\mathrm{sh}^2\,z\sqrt5\,\mathrm{sh}\,z}=$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}z}{5sh^2z}=-\frac15\mathrm{cth}\,z+C=-\frac15\frac{\mathrm{ch}\,z}{\mathrm{sh}\,z}+C=-\frac15\frac{\mathrm{ch}\,z}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\,z-1}}+C=$$

$$=-\frac15\frac{\dfrac{x}{\sqrt5}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{5}-1}}+C=-\frac15\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}+C.$$

Приклад 4. Підстановки Ейлера (перший випадок)

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Оскільки}\quad a>0,\quad \text{то}\\ \sqrt{x^2+x+1}=-x+t;\ t=x+\sqrt{x^2+x+1};\\ x^2+x+1=x^2-2xt+t^2;\ x+2xt=t^2-1;\\ x=\dfrac{t^2-1}{2t+1};\ \mathrm{d}x=\dfrac{2t(2t+1)-(t^2-1)\cdot2}{(2t+1)^2}\mathrm{d}t=\dfrac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}\mathrm{d}t}{t}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{4t^2+4t+1+3}{t(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t(2t+1)^2}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Розкладемо дріб на найпростіші}\\ \dfrac{3}{t(2t+1)^2}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{(2t+1)^2}+\dfrac{C}{2t+1}=\\ =\dfrac{A(2t+1)^2+Bt+Ct(2t+1)}{t(2t+1)^2}\\ \begin{array}{l|l} t=0 & A=3;\\ t=-\dfrac{1}{2} & 3=-\dfrac{1}{2}B;\ B=-6;\\ t=-1 & 3=A-B+C;\ 3=3+6+C;\ C=-6.\end{array}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\left(\frac{4}{t}+\frac{-\frac{1}{2}}{(2t+1)^2}+\frac{-6}{2t+1}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=2\ln|t|+\frac{1}{8}\frac{1}{2t+1}-3\ln|2t+1|+C=\left|t=x+\sqrt{x^2+x+1}\right|=$$

$$=2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right|+\frac{1}{8}\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2+x+1}+1}-3\ln\left|2x+2\sqrt{x^2+x+1}+1\right|+C\,.$$

Приклад 5. Підстановки Ейлера (другий випадок)

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Оскільки } a<0, \text{ а } c>0, \text{ то заміна (див. контрольні питання і завдання §1).}\\ \sqrt{1-2x-x^2}=1-xt;\ 1-2x-x^2=1-2xt+x^2t^2;\quad 2xt-2x=x^2t^2+x^2;\\ 2(t-1)=(t^2+1)x;\ x=2\dfrac{t-1}{t^2+1};\ \mathrm{d}x=2\dfrac{t^2+1-(t-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t=2\dfrac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t=\\ =-2\dfrac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t;\ \sqrt{1-2x-x^2}=1-2\dfrac{t-1}{t^2+1}t=\dfrac{t^2+1-2t^2+2t}{t^2+1}=\dfrac{-t^2+2t+1}{t^2+1}\end{array}\right|=$$

$$=-2\int\frac{\dfrac{t^2-2t-1}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t}{1+\dfrac{-t^2+2t+1}{t^2+1}}=-2\int\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)(t^2+1-t^2+2t+1)}\mathrm{d}t=-\int\frac{t^2-2t-1}{(t^2+1)(t+1)}\mathrm{d}t=$$

$$=-\int\frac{t^2+1-2(t+1)}{(t^2+1)(t+1)}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{2}{t^2+1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=2\,\mathrm{arctg}\,t-\ln|t+1|+C=$$

$$=\left|t=\frac{1-\sqrt{1-2x-x^2}}{x}\right|=2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{1-2x-x^2}}{x}-\ln\left|\frac{1+x-\sqrt{1-2x-x^2}}{x^2}\right|+C.$$

Завдання для роботи в аудиторії

1. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

2. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4x+4}}$.

3. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$.

4. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

5. $\int\frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$.

6. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

7. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.

8. $\int\sqrt{x^2-2x-1}\,\mathrm{d}x$.

9. $\int\sqrt{3x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$.

10. $\int\sqrt{1-4x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

11. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$.

12. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$.

13. $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

14. $\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

15. $\int\frac{(2x^2-3x)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

16. $\int\frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

17. $\int\frac{3x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

18. $\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\mathrm{d}x$.

19. $\int\frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\mathrm{d}x$.

20. $\int\frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

21. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$.

22. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\mathrm{d}x$.

23. $\int\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$.

24. $\int\frac{(2x+3)\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$.

25. $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

26. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

27. $\int\frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$.

28. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$.

29. $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$.

30. $\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (підстановка $x=a\sin z$).

31. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$ (підстановка $x = \frac{1}{z}$, або $x = a\,\mathrm{tg}\,z$, або $x = a\,\mathrm{sh}\,z$).

32. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ (підстановка $x = \frac{1}{z}$, або $x = \frac{a}{\cos z}$, або $x = a\,\mathrm{ch}\,z$).

Розрахункові завдання

Задача 8. Знайти інтеграли.

1. $\int \sqrt{256-x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$.

4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(9+x^2)^{3/2}}$.

5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

6. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x$.

7. $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

9. $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{(2-x^2)^{3/2}}$.

10. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{16-x^2}}$.

11. $\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(16+x^2)^{3/2}}$.

13. $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$.

14. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{25-x^2}}$.

15. $\int x^2\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x$.

16. $\int \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$.

17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$.

18. $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}\mathrm{d}x$.

19. $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$.

20. $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$.

21. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

22. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$.

23. $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$.

24. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\mathrm{d}x$.

25. $\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

26. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\mathrm{d}x$.

27. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

28. $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{(4-x^2)^{3/2}}$.

29. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

30. $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

§ 10. ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Набір задач, що пропонуються в цьому параграфі, є типовим для проведення підсумкової контрольної роботи з теми „Невизначений інтеграл”. Завдання містять 6 задач та розраховані на індивідуальне виконання студентами в аудиторії протягом двох годин.

В. 1

1. $\displaystyle\int e^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int x\cdot\cos^2 2x\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int \frac{2x+9}{\sqrt{x^2+5x-3}}\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+8}$.
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+4}}$.
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(3\,\mathrm{tg}\,x+5)\sin 2x}$.

В. 2

1. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+4)^6}$.
2. $\displaystyle\int \ln(3+x^2)\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int \frac{x+9}{\sqrt{x^2+2x+6}}\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x(1+\cos x)}$.

В. 3

1. $\displaystyle\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^8}}$.
2. $\displaystyle\int x\arcsin x\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int \frac{2x+27}{\sqrt{x^2-x-12}}\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int \frac{3x-7}{x^3+4x^2+4x+16}\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2+\sin x}$.

В. 4

1. $\displaystyle\int \sin 2x\sqrt{2-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int x\cdot 3^x\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int \frac{(4x+31)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2+11x+12}}$.
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2+2x+2}$.
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-3}}$.
6. $\displaystyle\int \frac{(2\,\mathrm{ctg}\,x+1)\,\mathrm{d}x}{2\sin x+\cos x}$.

В. 5

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(3\,\mathrm{tg}\,x+1)}$.
2. $\displaystyle\int x^2\cdot e^{3x}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int \frac{19-4x}{\sqrt{2x^2+x-3}}\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2}$.
5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int \frac{(8+\mathrm{tg}\,x)\,\mathrm{d}x}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

В. 6

1. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$.
2. $\displaystyle\int (1-\ln x)\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int \frac{11x-2}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^3+x^2-2x}\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\sin x)}$.

В. 7

1. $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1-\cos x}$.
2. $\int x\cdot\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{x^2-3}{x^4+5x^2+6}\,\mathrm{d}x$.
4. $\int \frac{9-2x}{\sqrt{x^2-5x+6}}\,\mathrm{d}x$.
5. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
6. $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

В. 8

1. $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.
2. $\int x\sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4-81}$.
4. $\int \frac{4x+27}{\sqrt{2x^2-x-6}}\,\mathrm{d}x$.
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+9}}$.
6. $\int \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

В. 9

1. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{8+x^3}$.
2. $\int x\cdot\ln^2 x\,\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{x^2-x+1}{x^4+2x^2-3}\,\mathrm{d}x$.
4. $\int \frac{17-2x}{\sqrt{x^2-5x+4}}\,\mathrm{d}x$.
5. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,\mathrm{d}x$.
6. $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(1+\sin x+\cos x)^2}$.

В. 10

1. $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$.
2. $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{x-13}{\sqrt{x^2-2x-8}}\,\mathrm{d}x$.
4. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,\mathrm{d}x$.
5. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,\mathrm{d}x$.
6. $\int \frac{3\operatorname{tg}^2 x-1}{\operatorname{tg}^2 x+5}\,\mathrm{d}x$.

В. 11

1. $\int e^{\cos^2 x}\cdot\sin 2x\,\mathrm{d}x$.
2. $\int \ln(3+x^2)\,\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{2x+27}{\sqrt{x^2+x+12}}\,\mathrm{d}x$.
4. $\int \frac{(3x+5)\,\mathrm{d}x}{x^3+4x^2+4x+16}$.
5. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}\,\mathrm{d}x$.
6. $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2+\sin x}$.

В. 12

1. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2-5)^3}$.
2. $\int x\arcsin x\,\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{4x-3}{\sqrt{2x^2+11x+12}}$.
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2}$.
5. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.
6. $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

В. 13

1. $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.
2. $\int x\cdot 2^x\,\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{1+4x}{\sqrt{2x^2+x-3}}\,\mathrm{d}x$.
4. $\int \frac{x+3}{x^3+x^2-2x}\,\mathrm{d}x$.

В. 14

1. $\int \sin 2x\sqrt{2-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.
2. $\int x^2\cdot e^{2x}\,\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{11x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\,\mathrm{d}x$.
4. $\int \frac{x^2-3}{x^4+5x^2+6}\,\mathrm{d}x$.

В. 15

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x(3\operatorname{ctg} x-1)}$.
2. $\int (1-\ln x)\,\mathrm{d}x$.
3. $\int \frac{4x-27}{\sqrt{2x^2+x-6}}\,\mathrm{d}x$.
4. $\int \frac{x^2-x+1}{x^4+2x^2-3}\,\mathrm{d}x$.

5. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.	5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+9}}$.	5. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x}{x^2}$.
6. $\int \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.	6. $\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(1+\sin x+\cos x)^2}$.	6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(3\,\mathrm{tg}\,x+5)\sin 2x}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач. – К.: А.С.К., 2001. – 480 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 384 с.
4. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П.. Математический анализ в примерах и задачах. Введение в анализ, производная, интеграл. – Ч. 1. – К.: Вища школа, 1974. – 680 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Т. 1. – М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.
6. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 1985. – 175 с.
7. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. – К.: Вища школа, 1986. – 512 с.
8. Бугров Я.С. Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – Т. 1. – М.: Наука, 1985. – 456 с.
10. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979. – 720 с.
11. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. – Т. 1. – М.: Высшая школа, 1973. – 614 с.
12. Зорич В.А. Математический анализ. – Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 541 с.