Основні елементарні функції

Основними елементарними функціями називають такі функції.

1. Степенева функція $y = x^{\alpha}$**,** $\alpha \in R$.

Область визначення цієї функції та її графік залежать від значення α (рис. 1(а)–(й)).

Нехай $\alpha = n$ ціле невід'ємне число. Тоді $y = x^{n}$.

$\alpha = 2k,\ k \in N$

$x \in (-\infty;+\infty),\ y \in [0;+\infty).$

—— $\alpha = 2$, —— $\alpha = 4$, —— $\alpha = 6$, —— $\alpha = 8$.

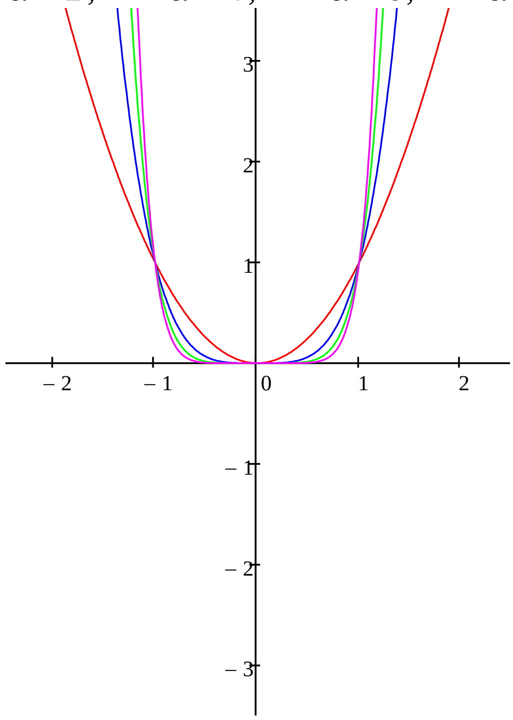


Рис. 1(а)

$\alpha = 2k - 1,\ k \in N$

$x \in (-\infty;+\infty),\ y \in (-\infty;+\infty).$

—— $\alpha = 1$, —— $\alpha = 3$, —— $\alpha = 5$, —— $\alpha = 7$.

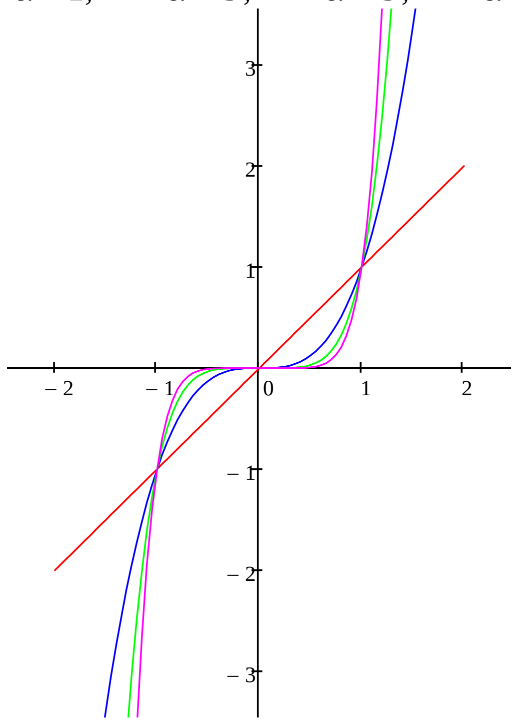


Рис. 1(б)

Нехай $\alpha = -n$ ціле від'ємне число. Тоді $y = \dfrac{1}{x^{n}}$.

$\alpha = -2k,\ k \in N$

$x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty),\ y \in (0;+\infty).$

—— $\alpha = -2$, —— $\alpha = -4$, —— $\alpha = -6$, —— $\alpha = -8$.

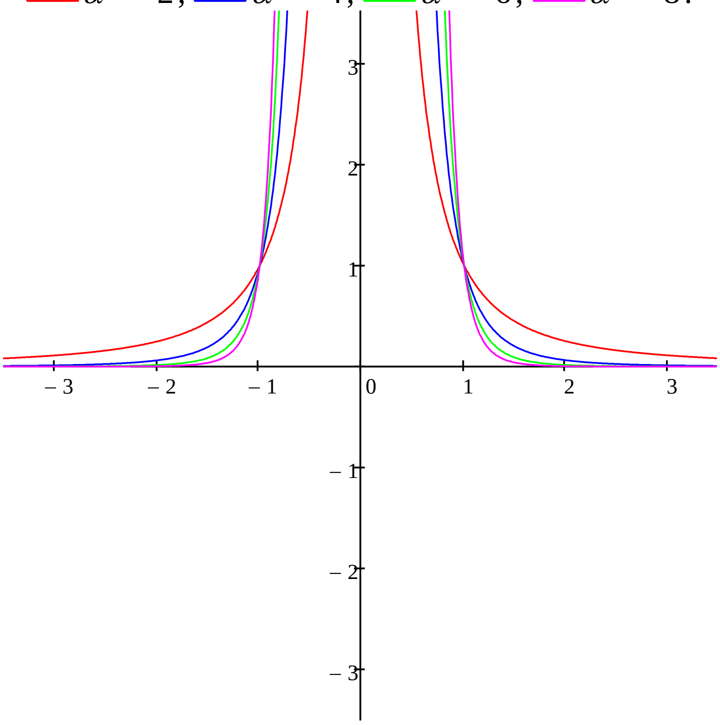


Рис. 1(в)

$\alpha = -2k + 1,\ k \in N$

$x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty),\ y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty).$

—— $\alpha = -1$, —— $\alpha = -3$, —— $\alpha = -5$, —— $\alpha = -7$.

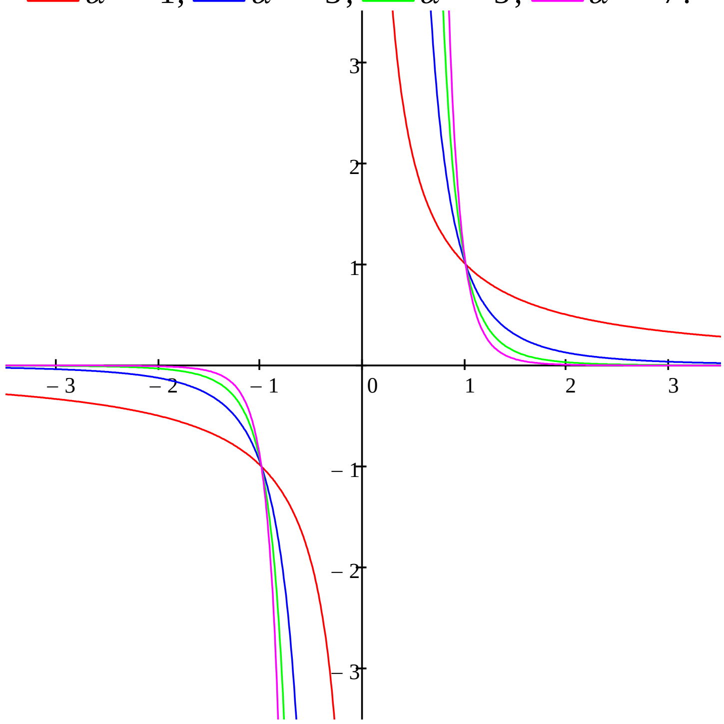


Рис. 1(г)

Нехай $\alpha = \dfrac{1}{n}$, де n натуральне число. Тоді $y = \sqrt[n]{x}$.

$$\alpha = \frac{1}{2k},\ k \in N$$

$$x \in [0;+\infty),\ y \in [0;+\infty).$$

$\alpha = 1/2$, $\alpha = 1/4$, $\alpha = 1/6$, $\alpha = 1/8$.

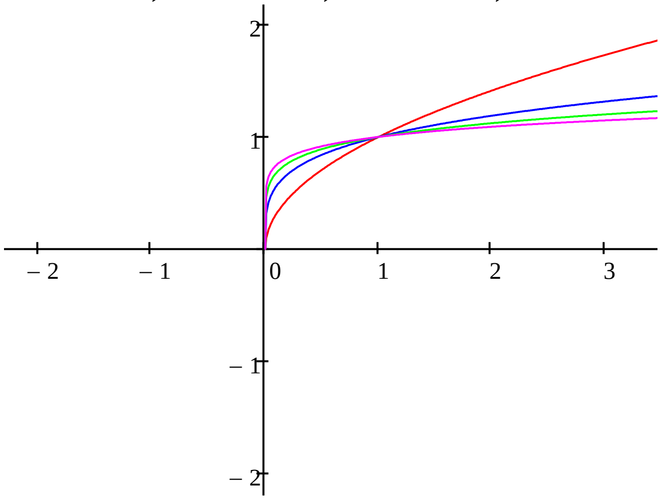


Рис. 1(д)

$$\alpha = \frac{1}{2k+1},\ k \in N$$

$$x \in (-\infty;+\infty),\ y \in (-\infty;+\infty).$$

$\alpha = 1/3$, $\alpha = 1/5$, $\alpha = 1/7$, $\alpha = 1/9$.

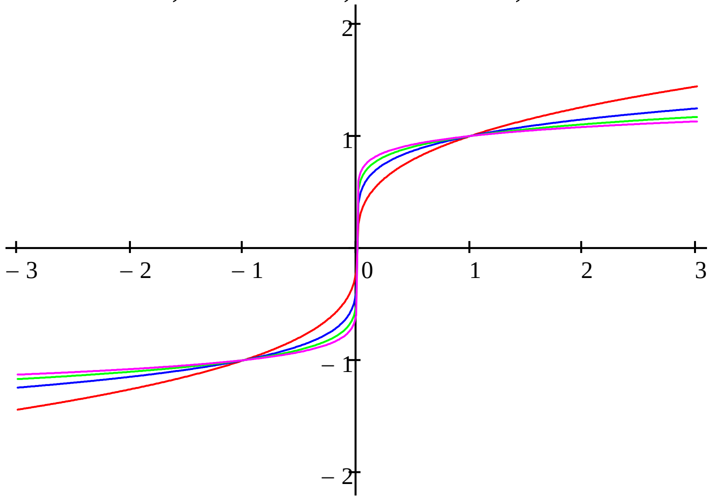


Рис. 1(е)

Нехай $\alpha = \dfrac{m}{n}$, m і n – взаємно прості натуральні числа. Тоді $y = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$.

$$n = 2k,\ k \in N$$

$$x \in [0;+\infty),\ y \in [0;+\infty).$$

$\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = \dfrac{1}{4}$, $\alpha = \dfrac{3}{2}$, $\alpha = \dfrac{11}{4}$.

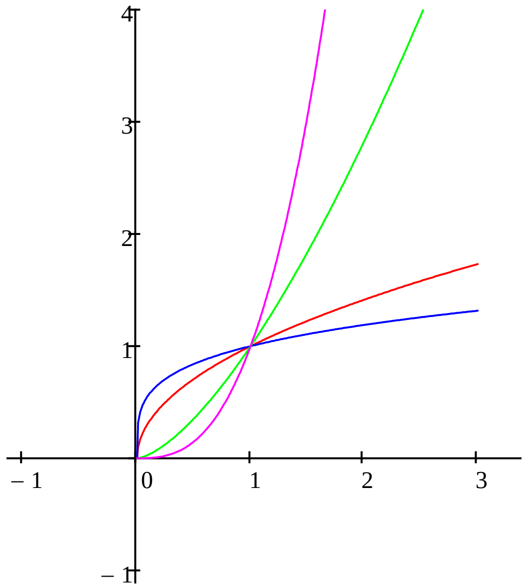


Рис. 1(є)

$$n = 2k+1,\ m = 2p,\ k, p \in N$$

$$x \in (-\infty;+\infty),\ y \in [0;+\infty).$$

$\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\alpha = \dfrac{2}{5}$, $\alpha = \dfrac{4}{3}$, $\alpha = \dfrac{16}{5}$.

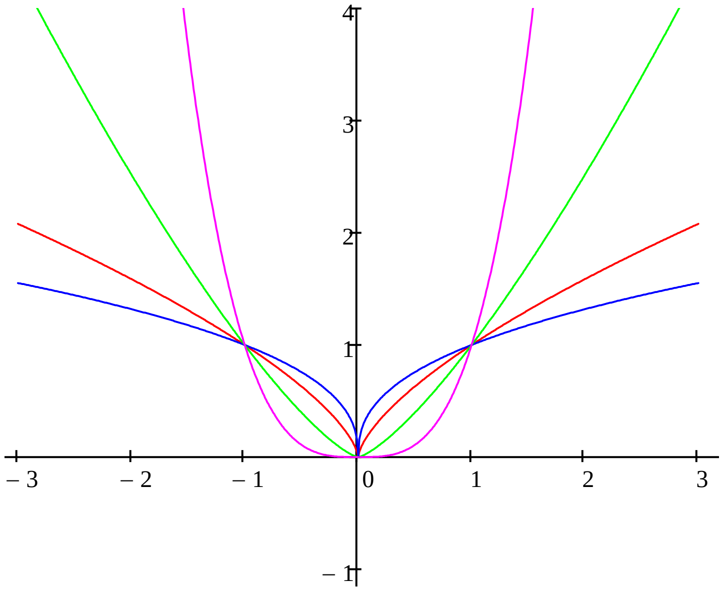


Рис. 1(ж)

$$n = 2k + 1,\ m = 2p + 1,\ k,\ p \in N$$
$$x \in (-\infty; +\infty),\ y \in (-\infty; +\infty).$$

$\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha = \frac{5}{3}$, $\alpha = \frac{13}{5}$.

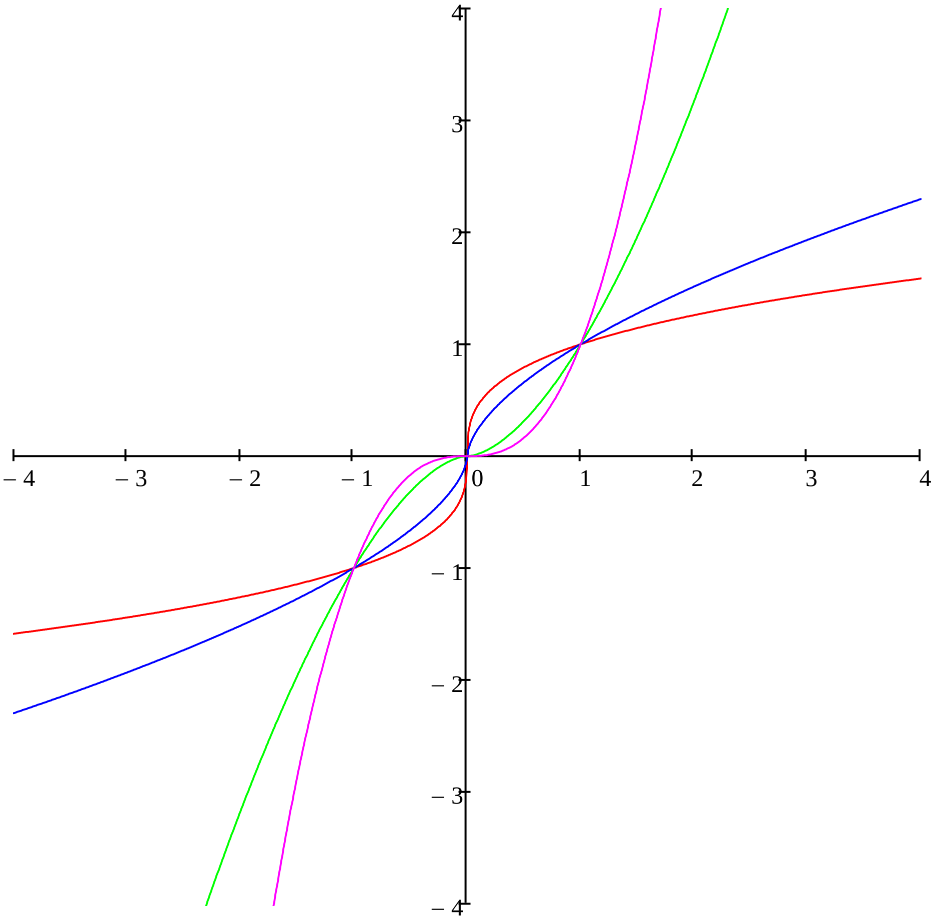


Рис. 1(з)

Нехай $\alpha = -\frac{m}{n}$, m і n – взаємно прості натуральні числа. Тоді $y = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^m}$.

$n = 2k,\ k \in N$. $x \in (0; +\infty),\ y \in (0; +\infty)$.

$\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{4}$,

$\alpha = -\frac{3}{2}$, $\alpha = -\frac{11}{4}$.

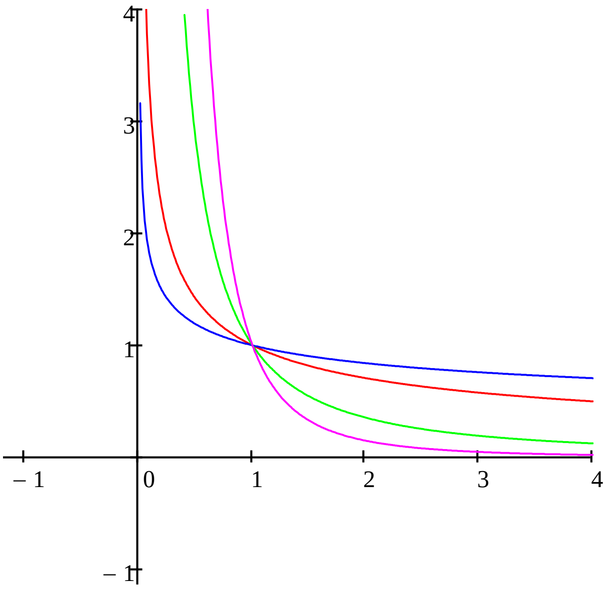


Рис. 1(і)

$$n = 2k + 1,\ m = 2p,\ k,\ p \in N$$
$$x \in (-\infty; 0) \cup (0 + \infty),\ y \in (0; +\infty).$$

$\alpha = -\frac{2}{3}$, $\alpha = -\frac{2}{5}$, $\alpha = -\frac{4}{3}$, $\alpha = -\frac{16}{5}$.

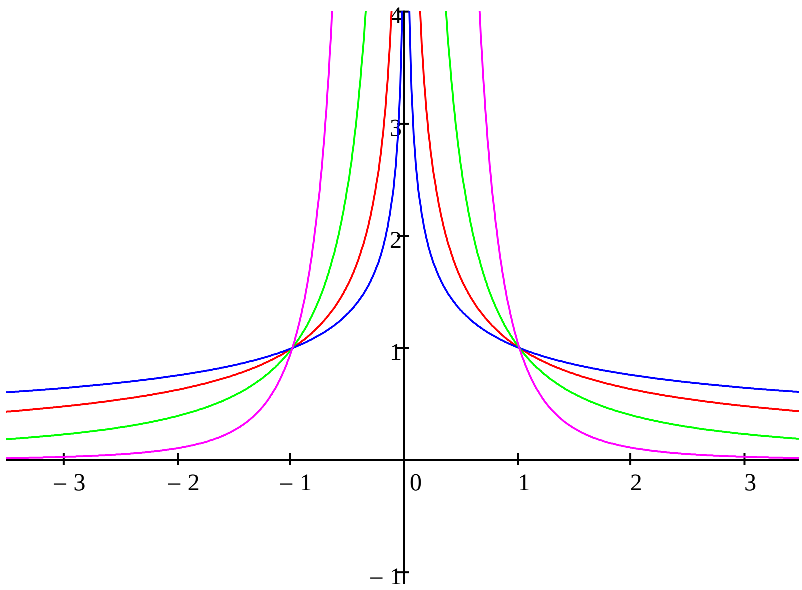


Рис. 1(и)

$$n = 2k+1,\ m = 2p+1,\ k, p \in N$$

$$x \in (-\infty;0) \cup (0+\infty),\ y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty).$$

$$\alpha = -\frac{1}{3},\ \alpha = -\frac{3}{5},\ \alpha = -\frac{5}{3},\ \alpha = -\frac{13}{5}.$$

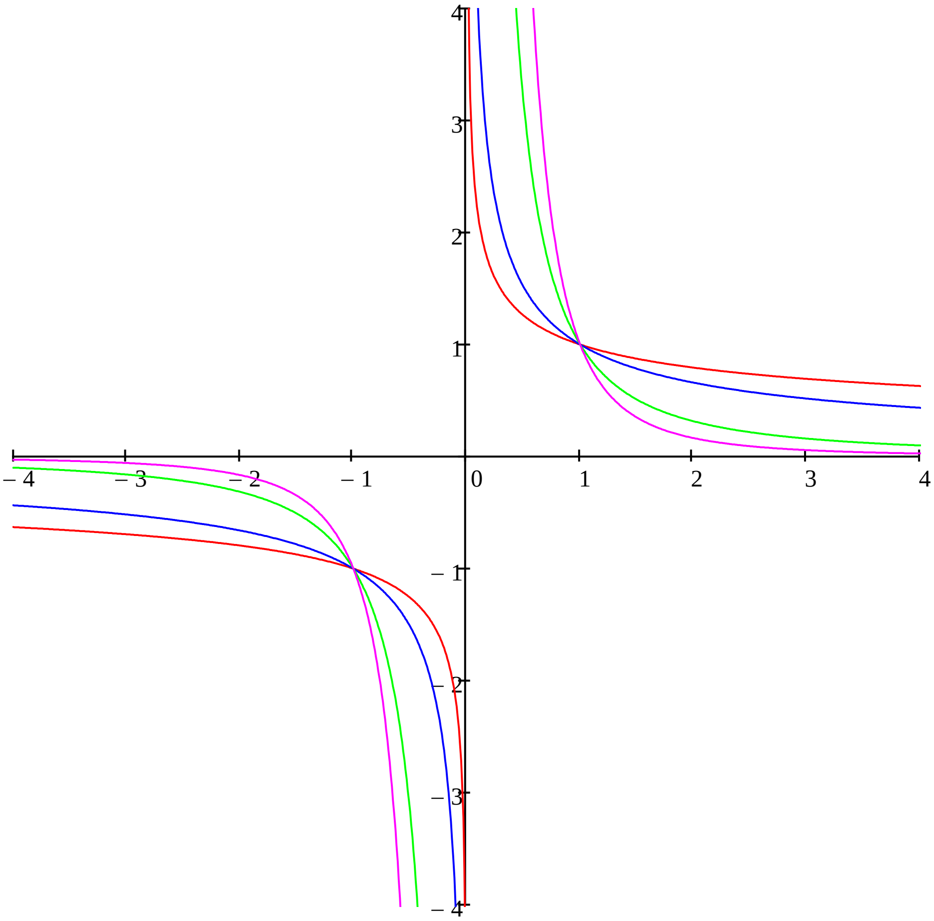
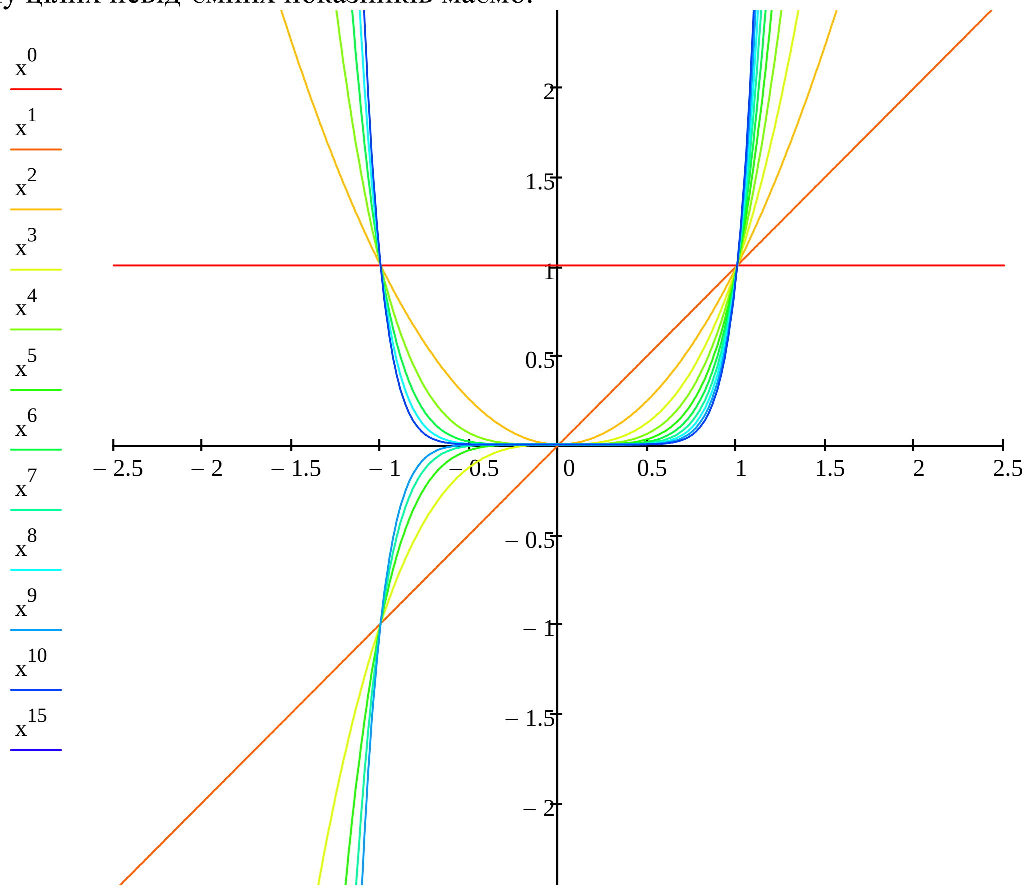
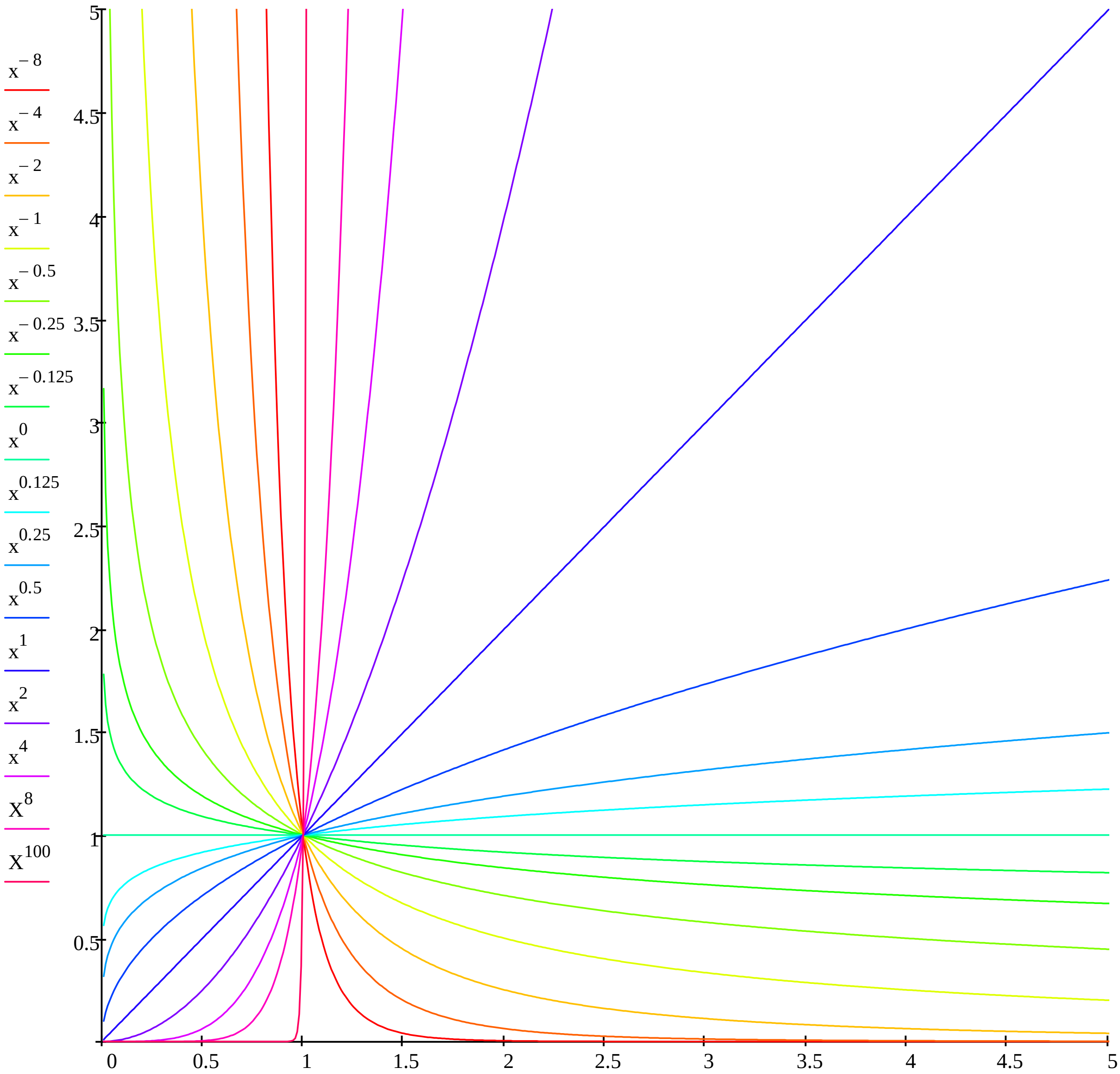


Рис. 1(й)

У випадку цілих невід'ємних показників маємо.



В загальному випадку для додатних x маємо.



2. Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a \in R$

Графіки показникової функції зображено на рис. 2 (а)–(б).

$a > 1$. $x \in (-\infty;+\infty)$, $y \in (0;+\infty)$.

$a = \frac{5}{3}$, $a = 2$, $a = e$, $a = 4$.

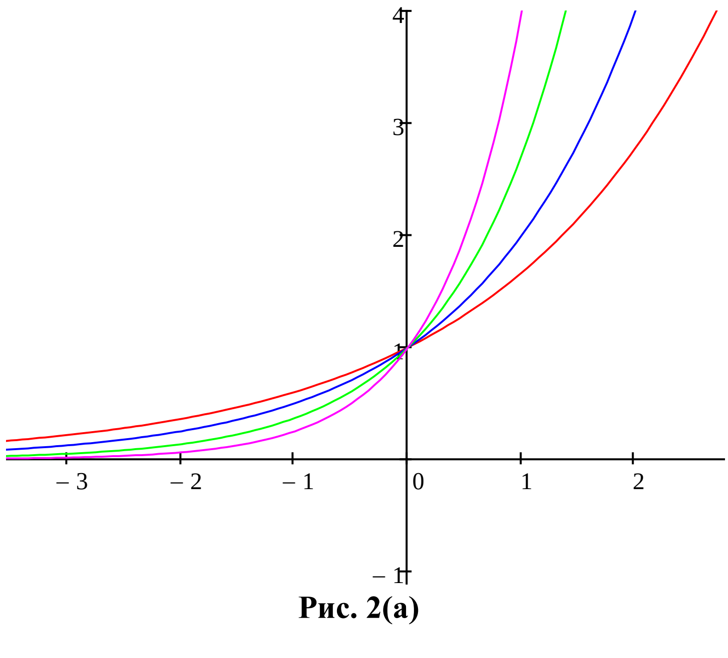


Рис. 2(а)

$0 < a < 1$. $x \in (-\infty;+\infty)$, $y \in (0;+\infty)$.

$a = \frac{3}{5}$, $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{e}$, $a = \frac{1}{4}$.

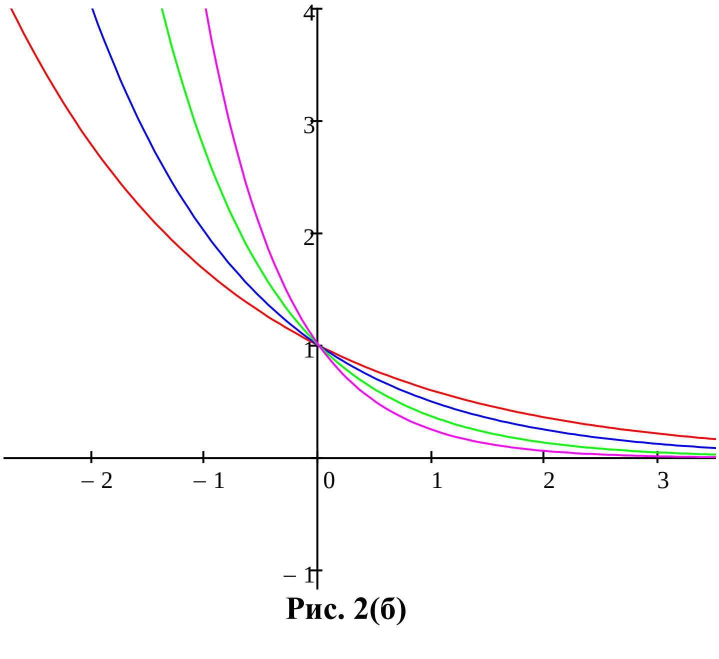


Рис. 2(б)

3. Логарифмічна функція $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, $a\in R$.

Графіки логарифмічної функції зображено на рис. 3(а)–(б).

$a>1$. $x\in(0;+\infty)$, $y\in(-\infty;+\infty)$.

—— $a=\dfrac{5}{3}$, —— $a=2$, —— $a=e$, —— $a=4$.

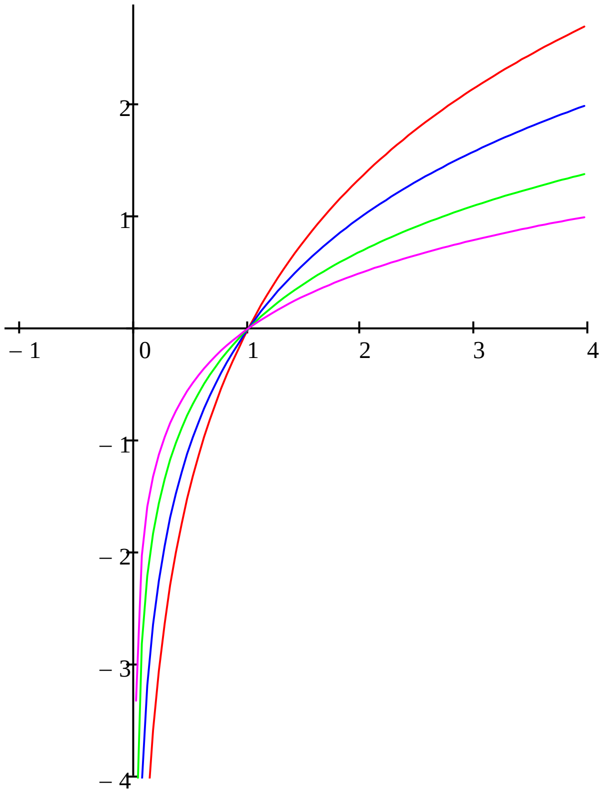


Рис. 3(а)

$0<a<1$. $x\in(0;+\infty)$, $y\in(-\infty;+\infty)$.

—— $a=\dfrac{3}{5}$, —— $a=\dfrac{1}{2}$, —— $a=\dfrac{1}{e}$, —— $a=\dfrac{1}{4}$.

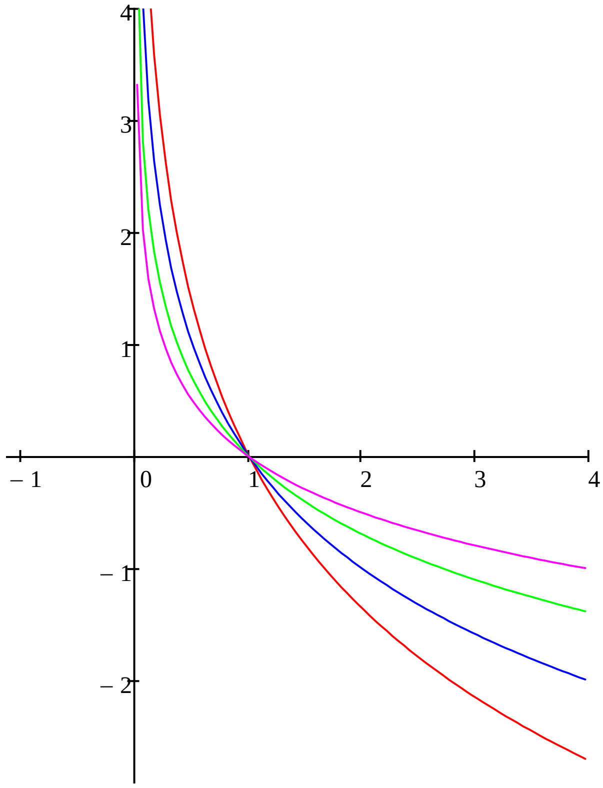


Рис. 3(б)

4. Тригонометричні функції: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}\,x$, $y=\mathrm{ctg}\,x$.

Графіки тригонометричних функцій зображено на рис. 4(а)–(г).

$y=\sin x$. $x\in(-\infty;+\infty)$, $y\in[-1;1]$. $T=2\pi$.

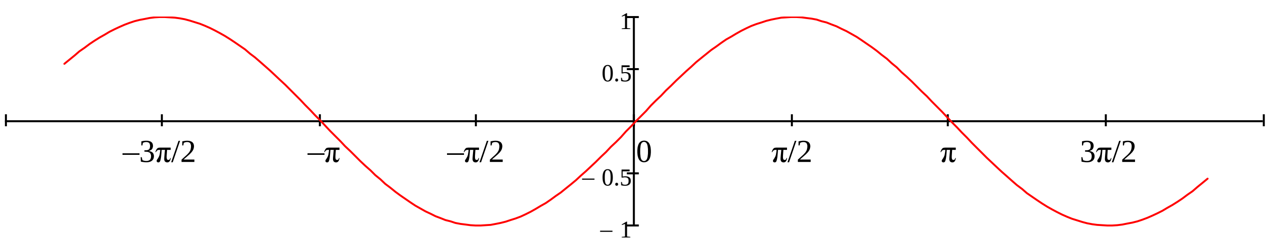


Рис.4(а)

$y=\cos x$. $x\in(-\infty;+\infty)$, $y\in[-1;1]$. $T=2\pi$.

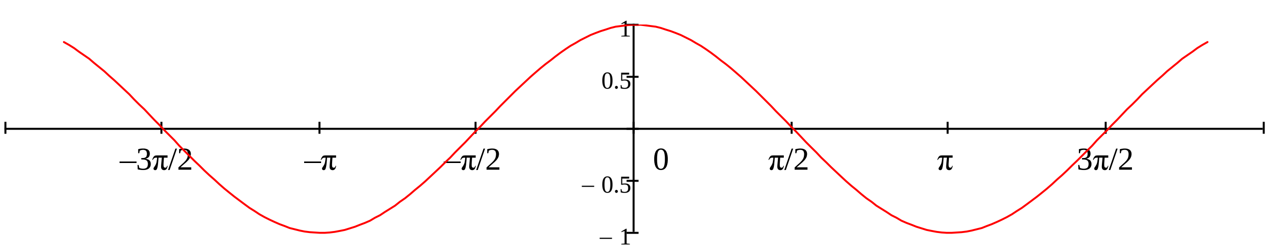


Рис. 4(б)

$y = \operatorname{tg} x$. $x \in (-\infty;+\infty)$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, $y \in (-\infty;+\infty)$. $T = \pi$.

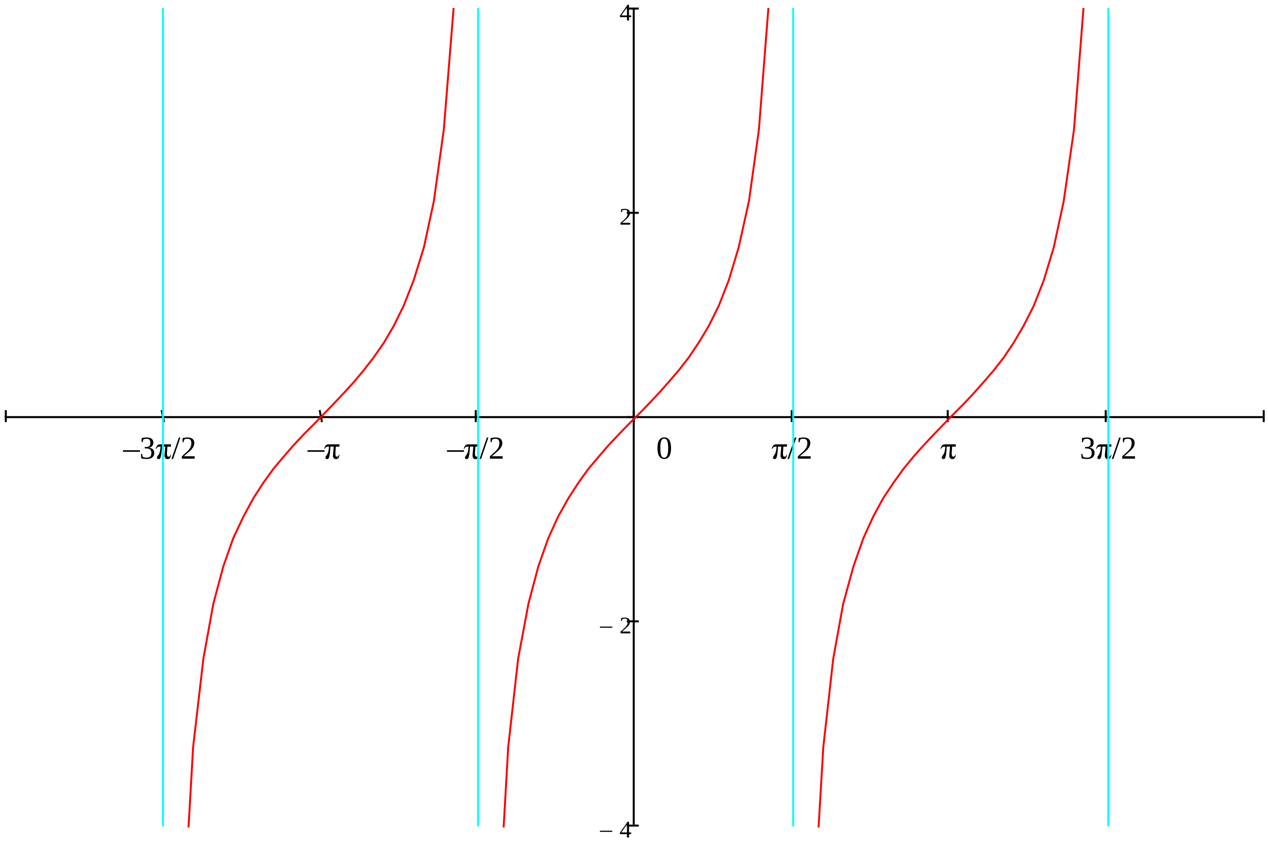


Рис. 4(в)

$y = \operatorname{ctg} x$. $x \in (-\infty;+\infty)$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$, $y \in (-\infty;+\infty)$. $T = \pi$.

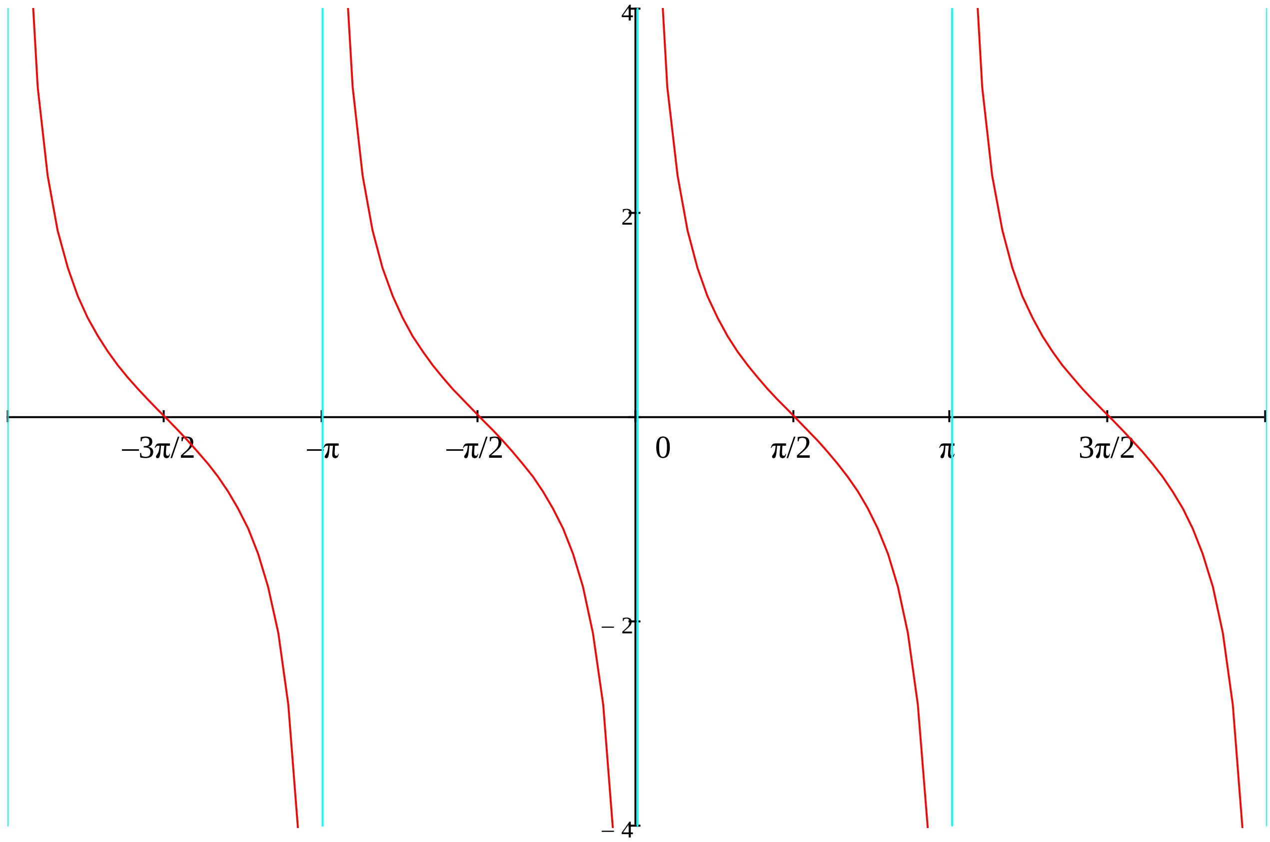


Рис. 4(г)

5. Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$.
Графіки обернених тригонометричних функцій зображено на рис. 5(а)–(г).

$y = \arcsin x, \quad x \in [-1;1], \; y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

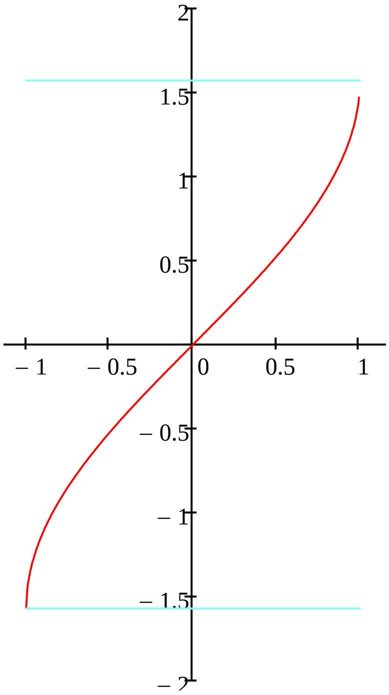


Рис. 5(а)

$y = \arcsin x, \quad x \in [-1;1], \; y \in [0; \pi].$

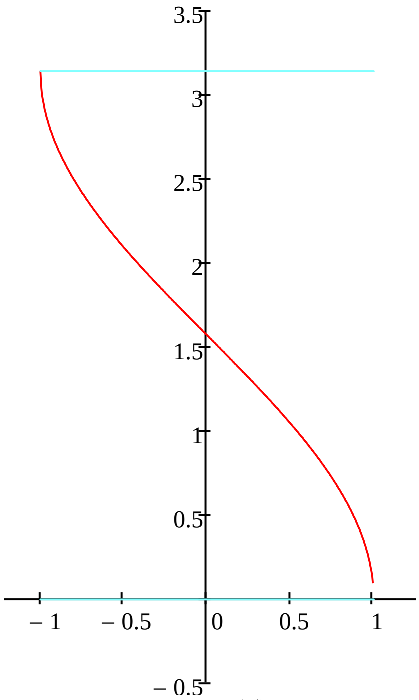


Рис. 5(б)

$y = \mathrm{arctg}\, x, \quad x \in (-\infty; +\infty), \; y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

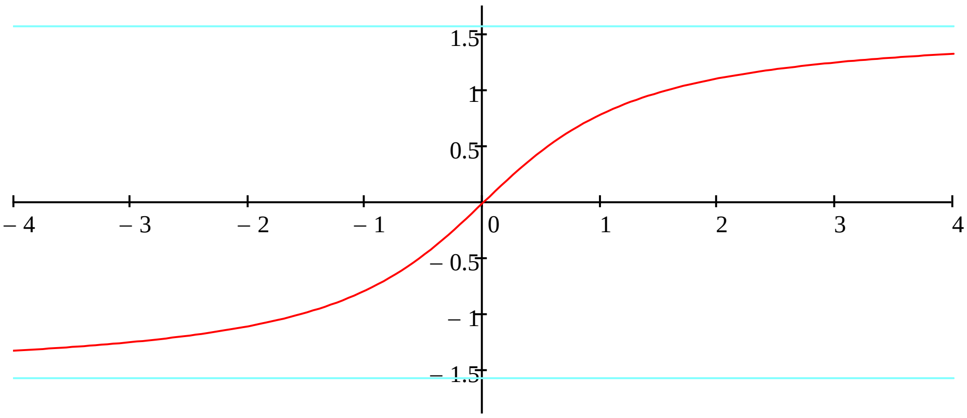


Рис. 5(в)

$y = \mathrm{arcctg}\, x, \quad x \in (-\infty; +\infty), \; y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

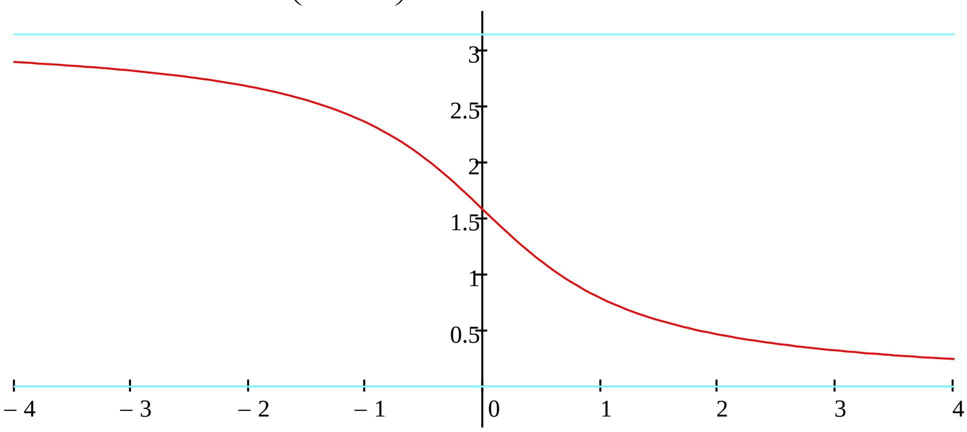


Рис. 5(г)

Розглядають також гіперболічні та обернені гіперболічні функції.

6. Гіперболічні функції:

$$y=\operatorname{sh}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2},\quad y=\operatorname{ch}x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\quad y=\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}},\quad y=\operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}.$$

Графіки гіперболічних функцій зображено на рис. 6(а)–(г).

$y=\operatorname{sh}x$. $x\in(-\infty;+\infty)$, $y\in(-\infty;+\infty)$.

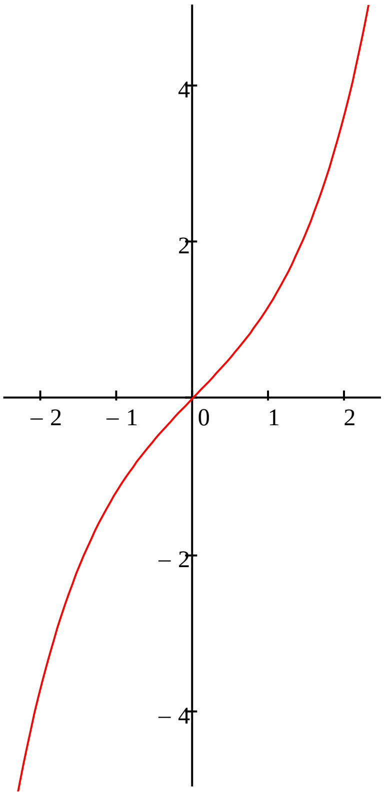


Рис. 6(а)

$y=\operatorname{ch}x$. $x\in(-\infty;+\infty)$, $y\in[1;+\infty)$.

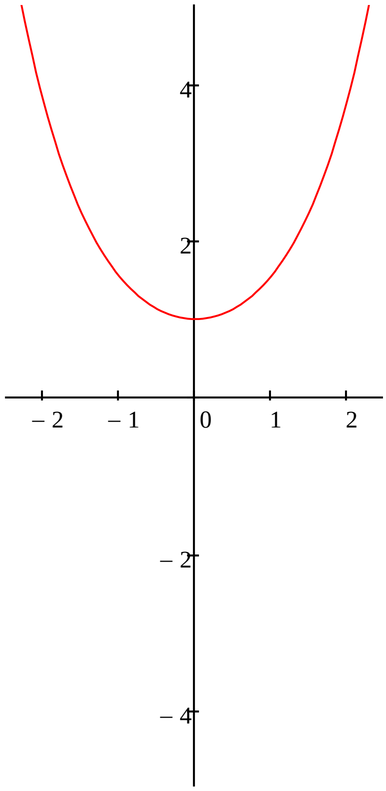


Рис. 6(б)

$y=\operatorname{th}x$.

$x\in(-\infty;+\infty)$, $y\in[-1;1]$.

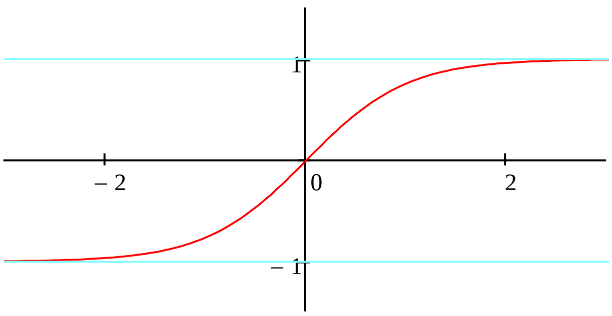


Рис. 6(в)

$y=\operatorname{cth}x$.

$x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $y\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

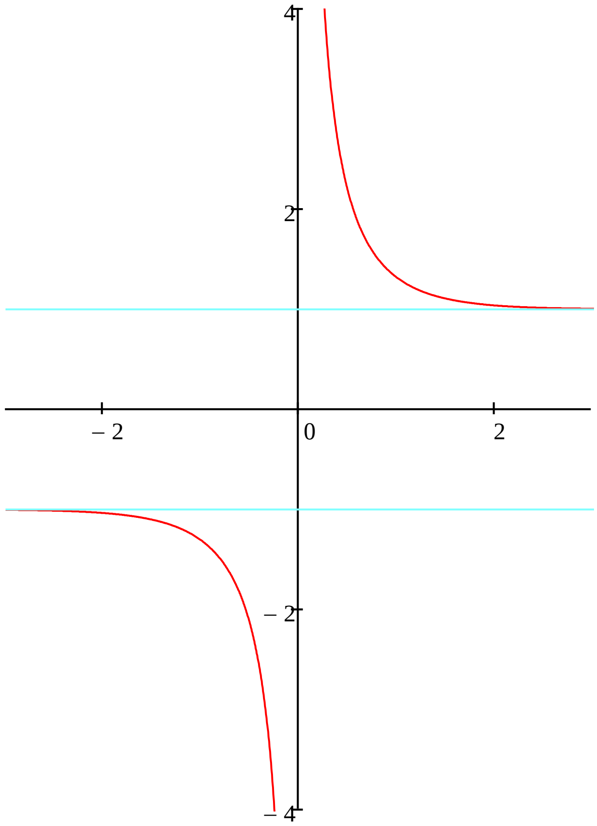


Рис. 6(г)

7. Обернені гіперболічні функції:

$y = \operatorname{arcsh} x$, $y = \operatorname{arcch} x$, $y = \operatorname{arcth} x$, $y = \operatorname{arccth} x$.

Графіки гіперболічних функцій зображено на рис. 7(а)–(г).

$y = \operatorname{arcsh} x$.

$x \in (-\infty;+\infty)$, $y \in (-\infty;+\infty)$.

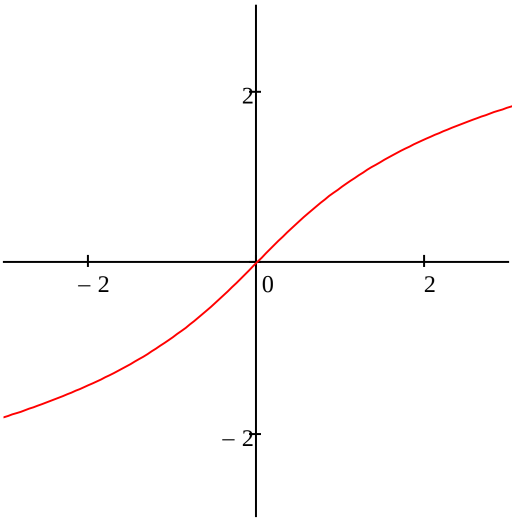


Рис. 7(а)

$y = \operatorname{arcch} x$.

$x \in [1;+\infty)$, $y \in [0;+\infty)$.

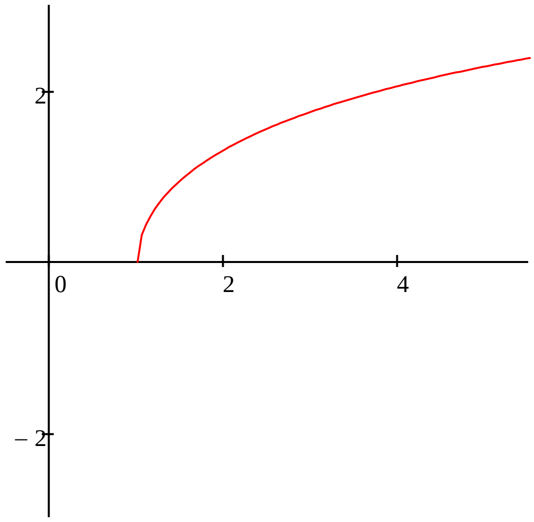


Рис. 7(б)

$y = \operatorname{arcth} x$.

$x \in (-1;1)$, $y \in (-\infty;+\infty)$.

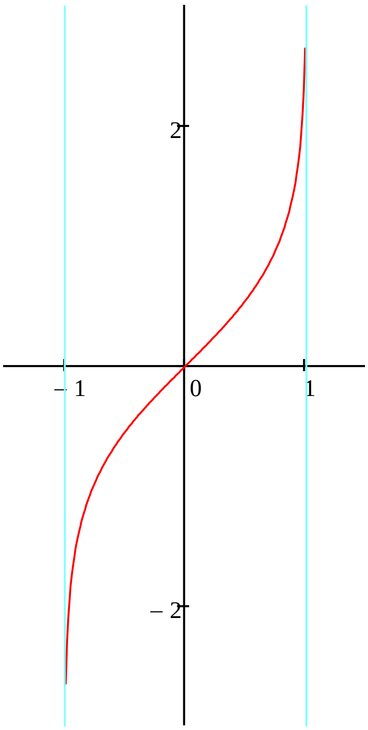


Рис. 7(в)

$y = \operatorname{arccth} x$.

$x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$, $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

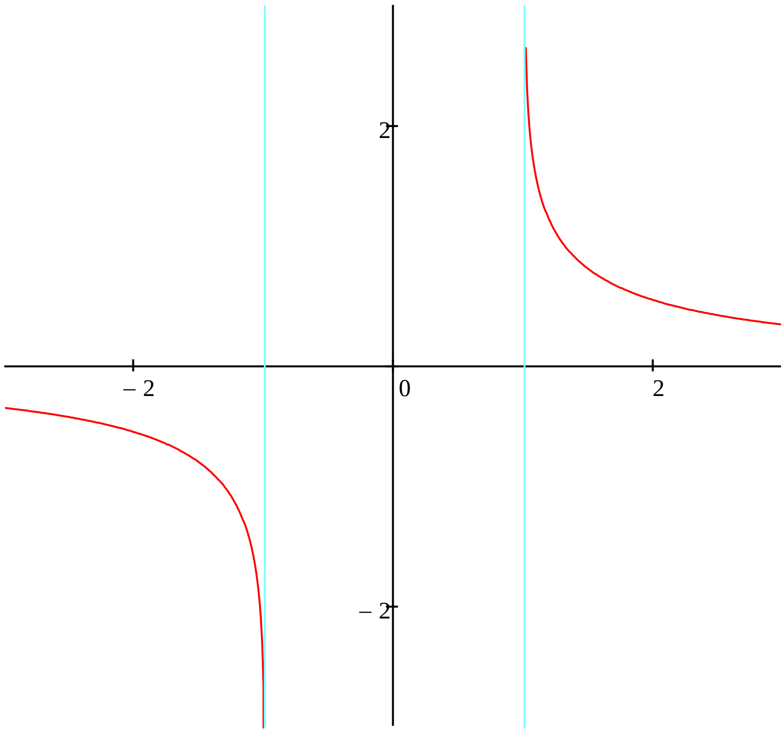


Рис. 7(г)