# Розділ 1. Випадкові події.

## §1.1. Елементи комбінаторики

Надалі множини із *n* елементів будемо називати <u>*n*-множинами</u>.

<u>Перестановкою з *n* елементів</u> називають розташування цих елементів у деякому порядку.

Число перестановок з *n* елементів позначається через $P_n$ і обчислюється за формулою:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!. \tag{1.1}$$

Зауважимо, що за означенням $0! = 1$.

*Наприклад:*

П1. Скількома способами можна скласти список з п'яти студентів?
Оскільки такий список є перестановкою з п'яти елементів, то за формулою (1.1) маємо: $P_5 = 5! = 120$. □

<u>Розміщенням з n елементів по *k*</u> називають впорядковану *k*-підмножину даної *n*-множини.

Отже, два розміщення з *n* по *k* вважаються різними, якщо вони відрізняються деякими елементами або складаються з однакових елементів, але розташованих у різному порядку.

Число розміщень з *n* елементів по *k* позначається символом $A_n^k$ і обчислюється за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1). \tag{1.2}$$

*Наприклад:*

П2. Знайдемо кількість розміщень із 6 елементів по 3.

За формулою (1.1) $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. □

<u>Комбінацією з *n* елементів по *k*</u> називають будь-яку (не впорядковану) *k*-підмножину елементів даної *n*-множини.

Отже, дві комбінації з *n* по *k* вважаються різними, якщо вони відрізняються хоча б одним елементом (порядок розташування елементів не враховується).

Кількість всіх комбінацій з *n* елементів по *k* позначається через $C_n^k$ і обчислюється за формулою:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.3}$$

Наведемо деякі важливі властивості комбінацій $C_n^k$:

1. $C_n^0 = 1$.
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
3. $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

*Наприклад:*

П3. Екзаменаційний білет містить 2 питання, кожне з яких вибирається із списку, що містить 60 питань. Скільки різних білетів можна скласти, якщо різними вважаються білети, які відрізняються хоча б одним питанням.

Число різних білетів, очевидно, дорівнює кількості комбінацій із 60 елементів по 2. За формулою (1.3) маємо

$$C_{60}^2 = \frac{60 \cdot 59}{2!} = 30 \cdot 59 = 1770.$$

Отже, можна скласти 1770 різних білетів. □

<u>Розміщенням з повтореннями з *n* елементів по *k*</u> називається будь-який упорядкований *k*-елементний набір з елементів *n*-множини, які не обов'язково мають бути різними.

Число таких розміщень позначається через $\overline{A_n^k}$ і обчислюється за формулою:

$$\overline{A_n^k} = n^k. \tag{1.4}$$

*Наприклад:*

П4. Скільки існує двозначних кодів складених із всіх цифр?

Розв'язання. За формулою (1.4) отримаємо

$$\overline{A_{10}^{2}}=10^{2}=100.$$

П5. Скільки існує десятизначних кодів, складених із двох різних цифр?

$$\overline{A_{2}^{10}}=2^{10}=1024. \square$$

<u>Перестановкою з повтореннями з *n* елементів</u> називається будь-яке впорядкування *n*-множини, серед елементів якої є однакові.

Якщо серед елементів *n*-множини $n_1$ елементів першого типу, $n_2$ – другого типу, ... , $n_k$ – *k*-го типу ($n_1+n_2+\ldots+n_k=n$), то число всіх перестановок з повтореннями, яке позначається через $P_n(n_1, \ldots, n_k)$ обчислюється за формулою

$$P_n(n_1,n_2,\ldots,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}. \qquad (1.5)$$

*Наприклад:*

П6. Скільки різних "слів" можна скласти, переставляючи букви в слові "математика"?

Розв'язання. Маємо $n=10$, кількість букв "м" – $n_1=2$, кількість "а" – $n_2=3$, кількість "т" – $n_3=2$, решта – по одній. За формулою (1.5) маємо

$$P_{10}(2,3,2,1,1,1)=\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=151200. \square$$

<u>Комбінацією з повтореннями з *n* елементів по *k*</u> називається будь-який *k*-елементний набір, де кожний з елементів належить до одного з *n* типів.

Число всіх комбінацій з повтореннями з *n* елементів по *k* позначається $\overline{C_n^{\,k}}$ і обчислюють за формулою

$$\overline{C}_n^{\,k}=C_{n+k-1}^{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \qquad (1.6)$$

*Наприклад:*

П7. Скількома способами можна купити 8 тістечок у кондитерській, де є 6 різних їх сортів?

Це число способів дорівнює $\overline{C}_6^{\,8}=C_{13}^{8}=C_{13}^{5}=1287$. □

Зауважимо, що значне число теорем і формул комбінаторики ґрунтується на двох елементарних правилах, які називаються правилами суми і добутку.

<u>**Правило суми.**</u> Якщо деякій об'єкт *a* можна вибрати *m* способами, а деякій об'єкт *b* – *n* способами, причому ніякій вибір *a* не збігається з жодним вибором *b*, то один з об'єктів *a* або *b* можна вибрати *m+n* способами.

<u>**Правило добутку.**</u> Якщо об'єкт $a$ можна вибрати $m$ способами і при кожному виборі об'єкта $a$ об'єкт $b$ можна вибрати $n$ способами, то вибір пари $(a,b)$ можна здійснити $m\cdot n$ способами.

*Наприклад:*

П8. В групі 30 студентів, з яких 18 дівчат і 12 хлопців. Навмання відбирають 10 студентів. Підрахувати кількість вибірок, в яких 6 дівчат і 4 хлопців.

Шість дівчат (об'єкт $a$) можна вибрати з 18-ти $C_{18}^{6}$ способами. Четверо хлопців (об'єкт $b$) із 12-ти можна вибрати $C_{12}^{4}$ способами. За правилом добутку отримаємо кількість всіх можливих вибірок 10-ти студентів, серед яких 6 дівчат і 4 хлопців:

$$m=C_{18}^{6}\cdot C_{12}^{4}=\frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2}=9189180. \square$$

<u>**Узагальнене правило добутку.**</u> Якщо об'єкт $a_1$ можна вибрати $m_1$ способами, об'єкт $a_2-m_2$ способами,.., об'єкт $a_k-m_k$ способами, то вибір системи об'єктів $(a_1,\, a_2,\ldots,a_k)$ можна здійснити $m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_k$ способами.

*Наприклад:*

П9. Із урни, яка містить 7 білих, 8 чорних і 5 зелених кульок, виймають навмання 5 кульок. Скількома способами можна вибрати 2 білі, 2 чорні і одну зелену кульки?

Дві білі можна вибрати $C_7^2$ способами, дві чорні кульки можна вибрати $C_8^2$ способами, одну зелену кульку можна вибрати $C_5^1$ способами. Таким чином, за узагальненим правилом добутку отримаємо відповідь:

$$m = C_7^2 \cdot C_8^2 \cdot C_5^1 = \frac{7\cdot 6}{2}\cdot\frac{8\cdot 7}{2}\cdot 5 = 2940. \ \square$$

## *§1.2 Основні поняття теорії ймовірностей*

Базовими поняттями теорії ймовірностей є поняття стохастичного експерименту, випадкової події та ймовірності випадкової події. Стохастичними називаються експерименти, результати яких неможливо передбачити наперед.

Будемо вважати, що розглядуваному експерименту поставлено у відповідність деяку множину $\Omega$, точки якої зображують найбільш повну інформацію про передбачувані результати даного експерименту. Множину $\Omega$ називають простором елементарних подій, а його точки $\omega$ – елементарними подіями.

*Наприклад:*

П10. Проводиться експеримент: один раз підкидають монету. Простір елементарних подій цього експерименту має вигляд $\Omega = \{\text{Г}, \text{Р}\}$, де Г означає появу герба, а Р – появу решки.

П11. Монету підкидають двічі. Простором елементарних подій цього експерименту є множина $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\}$.

П12. Кидають гральний кубик, на гранях якого вибиті очки від 1 до 6. Нас цікавить кількість очок, що випали. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.□

В цих прикладах простір елементарних подій є скінченним. Однак у багатьох задачах теорії ймовірностей доводиться мати справу з експериментами, які мають нескінченну кількість можливих результатів.

*Наприклад:*

П13. Нехай монету підкидають до тих пір, доки не з'явиться герб. Простором елементарних подій в цьому випадку буде

$$\Omega = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, \text{РРРГ}, \ldots, \underbrace{\text{Р}\ldots\text{Р}}_{n}\text{Г}, \ldots\}.$$

П14. Нехай стрілець стріляє в круглу мішень, тоді простором елементарних подій даного експерименту є точки круга $S$ та точка 0, з якою будемо ототожнювати з промахом мимо мішені. □

Випадковою подією називають будь-яку підмножину простору елементарних подій. Таким чином, з кожним експериментом пов'язують деяку множину подій, про які можна говорити, здійснилося воно в даному експерименті чи ні. Такі події називають спостережуваними в даному експерименті. Події позначають великими латинськими буквами $A$, $B$, …

Нехай $A$ – довільна подія, що спостерігається в експерименті. Тоді простір елементарних подій розбивається на дві доповнювані множини $A$ та $\overline{A}$ ($A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = \Omega$) так, що якщо результат експерименту описується точкою $\omega$ з множини $A$, то подія $A$ в цьому експерименті відбулася, якщо ж $\omega \in \overline{A}$, то подія $A$ не відбулася. Точки $\omega$ з множини $A$ називають елементарними подіями, що сприяють появі події $A$. Події $A$ та $\overline{A}$ називають протилежними подіями.

*Наприклад:*

П15. Нехай монету підкидають двічі, а подія $A$ полягає в тому, що хоча би один раз з'явиться герб. Тоді $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\}$, $A = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}\}$.

П16. Нехай один раз кидають гральний кубик, а подія $A$ полягає в тому, що кількість очок ділиться на 3. Тоді $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{3, 6\}$.

П17. Подія протилежна до події $A$ з прикладу 16 буде $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5\}$. □

Якщо розглядати саму множину $\Omega$ як подію, то вона характеризується тим, що вона обов'язково відбувається. Множину $\Omega$ називають достовірною подією.

Підмножиною будь-якої множини $\Omega$ є порожня множина $\varnothing$, яка не містить жодної точки з $\Omega$. Якщо $\varnothing$ ототожнювати з подією, то ця подія в експерименті ніколи не відбувається. Її називають неможливою подією.

Якщо кожен елемент множини $A$ міститься в $B$, то пишуть $A \subset B$. З точки зору подій це означає, що, якщо $A$ відбувається, то $B$ також відбувається. Кажуть, що з події $A$ слідує подія $B$.

Сумою подій $A$ і $B$ називається подія $C = A + B$, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається або подія $A$, або подія $B$. З точки зору теорії множин $C = A \cup B$.

Добутком подій $A$ і $B$ називається подія $C = A \cdot B$, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія $A$ і подія $B$. З точки зору теорії множин $C = A \cap B$.

Події $A$ і $B$ називають несумісними, якщо їх добуток є неможливою подією, тобто $A \cap B = \varnothing$.

*Наприклад:*

П18. Випробування полягає у підкиданні грального кубика.

Розглянемо події: $A$ – випаде парна кількість очок, $B$ – випаде п'ятірка ("5"), $C$ – випаде кількість очок, більша за "4". Тоді події $A$ і $B$ є несумісні, а події $B$ і $C$ є сумісними подіями.

Протилежною до події $C$ є подія $D$ – випаде кількість очок, менша за 5.

Тоді: 1) сума $A + B$ – це подія, яка полягає у тому, що випаде або парна кількість очок, або 5 очок; 2) сума $A + D$ – це подія, яка полягає у тому, що при підкиданні кубика випаде будь-яка кількість очок окрім "5"; 3) добуток $A \cdot D$ – це подія, яка полягає у тому, що при підкиданні кубика випаде 2 або 4 очка. □

## §1.3 Класичне, геометричне і статистичне означення ймовірності

Під ймовірністю випадкової події розуміють кількісну оцінку можливості появи цієї події. Ймовірність події $A$ позначають через $P(A)$.

Мають місце такі *властивості ймовірності* випадкової події:

1. $0 \le P(A) \le 1$.
2. $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$.
3. $P(A + B) = P(A) + P(B)$, якщо $A$ і $B$ – несумісні події.

Як наслідок властивостей 2 і 3 і означення протилежної події $\overline{A}$ маємо формулу для знаходження ймовірності протилежної події:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{3.1}$$

Дійсно, $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$, оскільки $A + \overline{A} = \Omega$.

Класична модель теорії ймовірностей має місце, якщо простір елементарних подій складається з скінченного числа рівноможливих елементарних подій.

*Наприклад:*

П19. В урні знаходяться $M$ білих і $N$ чорних кульок. Випробування полягає у тому, що з урни навмання дістають одну кульку. Будемо вважати, що кульки відрізняються тільки кольором і мають рівну можливість бути вийнятими. Тоді таких різних рівноможливих результатів даного випробування буде $M + N$. Вони і складають простір елементарних подій. Таким чином маємо класичну модель. □

*Зауваження*. Класичну модель отримуємо і у випадку, якщо навмання виймають $k$ кульок одночасно. Тоді простір елементарних подій складатиметься із $C_{M+N}^{k}$ елементарних подій.

Ймовірність події $A$ у випадку класичної моделі дорівнює відношенню кількості $m$ сприятливих подій для події $A$ до кількості $n$ всіх можливих елементарних подій у даному випробуванні:

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{3.2}$$

Формулу (3.2) будемо називати класичним означенням ймовірності. Можна показати, що для цього означення справедливі властивості ймовірності 1 – 3.

*Наприклад:*

П20. В умовах прикладу 19 знайдемо ймовірність вийняти білу кульку (подія $A$).

Оскільки всього елементарних подій $M+N$, а кількість сприятливих для події $A$ подій співпадає з кількістю білих кульок, то маємо $n=M+N$, $m=M$.

Тому за формулою (3.2) $P(A)=\dfrac{M}{M+N}$.

П21. (Задача вибору.). Інвестиційна компанія має $k$ пакетів акцій, серед яких є $r$ пакетів цукрових заводів. Визначити ймовірність того, що серед навмання вибраних $m$ пакетів акцій є рівно $l$ пакетів цукрових заводів.

Випробування полягає в тому, що з $k$ пакетів акцій навмання вибирають $m$ пакетів. Кількість всіх елементарних подій (результатів) дорівнюватиме числу комбінацій з $k$ по $m$, тобто $n=C_k^m$. Сприятлива подія полягає в тому, що серед вибраних $m$ пакетів $l$ пакетів $(l<m)$ належать цукровим заводам. Різних виборок $l$ пакетів із існуючих $r$ дорівнює $C_r^l$. Інші пакети, а їх буде $m-l$, будуть вибиратися з $k-r$ пакетів (не цукрових заводів) таких виборок буде $C_{k-r}^{m-l}$. Тому кількість сприятливих подій за правилом добутку дорівнює $C_r^k\cdot C_{k-r}^{m-l}$.

За формулою (3.2) отримаємо відповідь

$$P=\frac{C_r^l\cdot C_{k-r}^{m-l}}{C_k^m}.$$

П22. В групі з 25 студентів 12 хлопців і 13 дівчат. Для студентської профспілкової конференції треба вибрати 5 студентів. Знайдіть ймовірність таких подій: а) $A-$"всі 5 обраних студентів – дівчата"; б) $B-$"тільки два із 5 обраних студентів – хлопці"; в) $C-$"хоча б один з обраних студентів є хлопцем".

Вважатимемо, що жоден студент групи не має ніяких переваг над іншими, які стосуються можливості бути обраним на конференцію. Тоді маємо класичний випадок. Кількість всіх елементарних подій для даного випробування дорівнює числу комбінацій з 25 по 5, тобто $n=C_{25}^5$.

а) кількість $m$ сприятливих елементарних подій для $A$ дорівнюватиме $C_{13}^5$. Тому за формулою (3.2)

$$P(A)=\frac{C_{13}^5}{C_{25}^5}=\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21}=\frac{39}{1610}=0{,}024;$$

б) кількість різних пар хлопців з 12 дорівнює $C_{12}^2$. Оскільки обирають 5 студентів, то серед обраних на конференцію буде троє дівчат. Таких "трійок" із 13 студентів буде $C_{13}^3$. Тоді, за правилом добутку з комбінаторики: $m=C_{12}^2\cdot C_{13}^3$. За формулою (3.2) отримаємо:

$$P(B)=\frac{C_{12}^2\cdot C_{13}^3}{C_{25}^5}=\frac{12\cdot11}{2!}\cdot\frac{13\cdot12\cdot11}{3!}\cdot\frac{5!}{25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21}=0{,}355;$$

в) для знаходження ймовірності події С скористаємося формулою (3.1). Дійсно, протилежною до події – "хоча б один з обраних студентів є хлопець" буде подія – "жоден з обраних студентів не є хлопець, тобто всі 5 – дівчата" Таким чином, $\overline{C}=A$. Тому

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(A)=1-0{,}024=0{,}976.\ \square$$

Потреба у геометричній ймовірності виникає, коли простір елементарних подій є неперервною множиною. Це має місце, якщо випадкова подія $A$ полягає в необхідності потрапити у певну точку області (відрізок, плоску або просторову фігуру, тощо).

Позначимо через $mes$ міру області (довжину, площу, об'єм, тощо).

Ймовірність того, що точка, яку кинули навмання в область $\Omega$, попаде в певну частину цієї області – область $A$, дорівнює

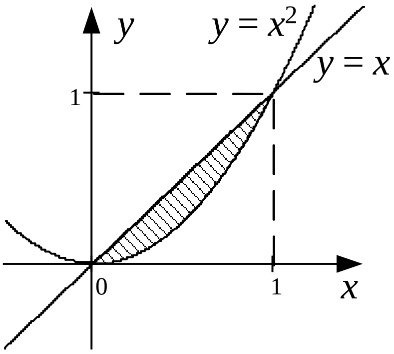
$$P(A) = \frac{mes\ A}{mes\ \Omega}. \qquad (3.3)$$

При цьому вважають, що ймовірність влучення точки в будь-яку частину області $\Omega$ пропорційна мірі цієї частини і не залежить від її форми та розташування в області $\Omega$.

Можна показати, що для цього означення справедливі властивості ймовірності 1 – 3.

*Наприклад:*

П23. Дана область $\Omega = \{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$. Яка ймовірність того, що точка з координатами $(x,\ y)$, яку навмання кинули в область $\Omega$, попаде в область $A$, яка обмежена кривими: $y = x^2,\ y = x$?




Оскільки простір елементарних подій складається з усіх точок даного квадрату, тобто є неперервною множиною, використовуємо формулу (3.3). Очевидно $mes\ \Omega = S(\Omega) = 1$,

$$S(A) = \int_0^1 \left(x - x^2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Підставивши у формулу (3.3), отримаємо:

$$P(A) = \frac{1/6}{1} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167. \ \square$$

Поняття статистичної ймовірності тісно пов'язане з поняттям відносної частоти події.

Нехай проведено $N$ однакових випробувань. При цьому деяка подія $A$ відбулася рівно в $M$ випробуваннях (з цих $N$). Тоді відносною частотою події $A$ називається відношення $M$ до $N$.

Відносна частота події $A$ позначається $\mu(A)$.

Отже,

$$\mu(A) = \frac{M}{N}. \qquad (3.4)$$

Для відносної частоти події $A$ справедливі властивості ймовірності 1-3.

Якщо спостереження проходять в однакових умовах і у кожному з них число випробувань $N$ достатньо велике, то відносна частота є **стійкою** величиною, тобто змінюється мало в різних спостереженнях.

Статистичною ймовірністю події $A$ будемо називати число, навколо якого групуються відносні частоти появи події $A$ при великому числі випробувань.

*Наприклад:*

П24. Розглянемо серію підкидань монети. При цьому вважатимемо, що поява кожної сторони монети в одному випробуванні є рівноможливими подіями (монета має правильну форму, виготовлена з однорідного матеріалу тощо). Тоді, якщо число підкидань достатньо велике (кілька тисяч), то відносна частота появи цифри буде дуже мало відрізнятися від числа 0,5. Тому є підстави вважати статистичну ймовірність появи «цифри» (або «герба») при одному підкиданні такої монети рівною 0,5. Цей дослід цікавив багатьох вчених. Наведемо результати їх спостережень.

| Експериментатор | Число підкидань | Число гербів | Відносна частота |
|---|---|---|---|
| Бюффон | 4040 | 2048 | 0,5069 |
| Пірсон | 12000 | 6019 | 0,5016 |
| Пірсон | 24000 | 12012 | 0,5005 |

□