§1.4 Сума і добуток ймовірностей.

Формула повної ймовірності. Формула Байєса.

Теорема 1. (Додавання ймовірностей) ○

Для будь-яких двох подій A і B має місце формула

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \bullet \tag{4.1}$$

Якщо події A і B несумісні, то їх добуток є неможливою подією. Тому $P(A\cdot B)=0$. Звідси маємо наслідок.

Наслідок 1. ○

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \bullet \tag{4.2}$$

Наприклад:

П25. Знайдемо ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде кількість очок, яка ділиться на 3.

Позначимо через A подію – поява кількості очок, що ділиться на 3. Сприятливих до A елементарних подій маємо дві: $\omega_3 -$ "випаде 3 очки", $\omega_6 -$"випаде 6 очок". Тоді $A=\omega_3+\omega_6$. Оскільки події ω_3 і ω_6 – несумісні, то використовуємо формулу (4.2). Враховуючи, що ймовірності подій ω_3 і ω_6 рівні 1/6, маємо відповідь $P(A)=1/6+1/6=1/3$.

П26. Знайдемо тепер ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде кількість очок, яка ділиться на 3 або на 2.

Позначимо B подію – поява кількості очок, що ділиться на 2. $B=\omega_2+\omega_4+\omega_6$. Тоді подія C – кількість очок ділиться на3 або на 2 запишеться так: $C=A+B$. Оскільки ω_6 входить як до події A так і до події B, то за формулою (4.1) маємо

$P(C)=P(A)+P(B)-P(AB)=1/3+3/6-1/6=4/6=2/3$. □

Нехай події A і B пов'язані з одним випробуванням.

Умовною ймовірністю $P_B(A)$ називається ймовірність події A, яка обчислена за умови, що подія B вже відбулася. За означенням

$$P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Дві події A і B називаються незалежними, якщо ймовірність однієї з них не залежить від того, відбулася інша подія чи ні.

Якщо A і B незалежні події, то:

$$P_B(A)=P(A),\quad P_A(B)=P(B). \tag{4.3}$$

Теорема 2. (Множення ймовірностей) ○

Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї події на умовну ймовірність іншої, за умови, що перша подія вже відбулася:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A). \bullet \tag{4.4}$$

Зауваження. ○

Формула (4.4) може бути узагальнена на три і більшу кількість множників. Наприклад, для трьох множників вона матиме вигляд:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C). \bullet \tag{4.5}$$

Наприклад:

П27. З урни, в якій міститься 8 чорних і 5 білих куль, послідовно виймають чотири кулі. Яка ймовірність вийняти кулі в такій послідовності: біла, чорна, біла, чорна?

Позначимо через A_i – випадкову подію, яка полягає в появі білої кулі при i-му вийманні. Тоді $\overline{A_i}$ – поява чорної кульки при i-му вийманні. Ймовірність події A – вийнято 4 кульки у вказаній послідовності – знаходимо за формулою (4.5):

$P(A)=P(A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3\cdot\overline{A}_4)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(\overline{A}_2)\cdot P_{A_1\overline{A}_2}(A_3)\cdot P_{A_1\overline{A}_2A_3}(\overline{A}_4)$.

За класичною формулою отримаємо:

$P(A_1)=\dfrac{5}{13}$, $P_{A_1}(\overline{A}_2)=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$, $P_{A_1\overline{A}_2}(A_3)=\dfrac{4}{11}$, $P_{A_1\overline{A}_2A_3}(\overline{A}_4)=\dfrac{7}{10}$.

Тому $P(A)=\dfrac{5}{13}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{11}\cdot\dfrac{7}{10}=\dfrac{28}{429}\approx 0{,}065$. □

Наслідок 2. ○

Ймовірність добутку двох незалежних подій *A* і *B* дорівнює добутку їх ймовірностей, тобто

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).\ \bullet \tag{4.6}$$

Наслідок 3. ○

Якщо події A і B незалежні, то незалежними будуть також події

$$A \text{ і } \overline{B},\ \overline{A} \text{ і } B,\ \overline{A} \text{ і } \overline{B}.\ \bullet$$

Наприклад:

П28. Троє студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Ймовірність скласти іспит для першого студента дорівнює 0,7, для другого – 0,8, для третього – 0,9. Знайдемо ймовірності наступних подій: $A-$іспит складе рівно два студенти, $B-$іспит складуть всі троє студентів, $C-$ іспит складе принаймні один студент.

Позначимо через A_i подію – «i-ий студент складе іспит» (i = 1, 2, 3).

За умовою задачі: $P(A_1)=p_1=0{,}7;$ $P(A_2)=p_2=0{,}8;$ $P(A_3)=p_3=0{,}9.$ Нехай $P(\overline{A}_i)=q_i$. Тоді $q_1=1-p_1=0{,}3;$ $q_2=1-p_2=0{,}2;$ $q_3=1-p_3=0{,}1.$

Виразимо події A і B через події A_i:

$$A=A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3+\overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3,\quad B=A_1\cdot A_2\cdot A_3.$$

Доданки, з яких складається подія A, очевидно є несумісними випадковими подіями. За формулою (4.2) маємо:

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3)+P(A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3)+P(\overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3).$$

Оскільки множники у кожному доданку, за теоремою 4, є незалежні події, то за формулою (4.6):

$$P(A)=p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3=0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}7\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}398,$$

$$P(B)=p_1\cdot p_2\cdot p_3=0{,}504.$$

Для знаходження ймовірності події C скористаємося формулою $P(C)=1-P(\overline{C})$. Випадкова подія $\overline{C}$ полягає в тому, що жоден студент не складе іспит.

Тому $\overline{C}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3$, $\quad P(\overline{C})=q_1\cdot q_2\cdot q_3=0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}006.$

Таким чином, $P(C)=1-0{,}006=0{,}994.$ □

<u>Повною групою подій</u> називається сукупність несумісних подій $A_1, A_2, ..., A_n$, сума яких є вірогідною подією, тобто: $A_1+A_2+...+A_n=\Omega$.

З означення повної групи подій і властивостей ймовірності випливає, що сума ймовірностей подій, які складають повну групу, дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1. \tag{4.7}$$

Нехай випадкова подія A може здійснитися тільки після здійснення однієї із подій H_i, $i=1,...,n$, які утворюють повну групу подій. Події $H_1, H_2,..., H_n$ називають гіпотезами для події A. Тоді ймовірність події A обчислюється за формулою, яку називають *формулою повної ймовірності:* ○

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+...+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A),$$

або коротко

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A).\ \bullet \tag{4.8}$$

Наприклад:

П29. Дві групи студентів склали іспит з математики. В першій групі навчаються 28 студентів, з них 10 отримали оцінку «відмінно». В другій групі навчаються 22 студенти, з них 7 отримали «відмінно». Знайти ймовірність того, що навмання вибраний з цих двох груп студент отримав на екзамені «відмінно».

Розв'язання. Позначимо через A подію – «навмання вибраний студент отримав „відмінно‘‘. Введемо гіпотези: H_1 – студент належить до першої групи, H_2 – студент належить до другої групи.

За класичною формулою ймовірності маємо:

$$P(H_1)=\frac{28}{50},\ P(H_2)=\frac{22}{50},\ P_{H_1}(A)=\frac{10}{28},\ P_{H_2}(A)=\frac{7}{22}.$$

За формулою повної ймовірності (4.8) отримаємо:

$$P(A)=\frac{28}{50}\cdot\frac{10}{28}+\frac{22}{50}\cdot\frac{7}{22}=\frac{17}{50}=0{,}34.\ \square$$

Нехай відомо, що подія A в результаті випробування відбулася. Іноді виникає потреба переоцінити ймовірності гіпотез, врахувавши факт здійснення події A. Така переоцінка здійснюється за *формулою Байєса*: ○

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)},\ \bullet \tag{4.9}$$

де $P(A)$ обчислюється за формулою повної імовірності (4.8).

Зауважимо, що для переоцінених (апостеріорних) ймовірностей гіпотез також має виконуватися формула (4.7), тобто $\sum_{i=1}^{n} P_A(H_i)=1$.

Наприклад:

П30. У першому ящику знаходяться 8 стандартних і 2 браковані деталі, а в другому – 9 стандартних і 3 браковані. Ящики мають однаковий зовнішній вигляд. Із навмання вибраного ящика навмання дістали дві деталі. Обидві деталі виявилися стандартними. Яка ймовірність того, що їх дістали з другого ящика?

Позначимо через A подію – «дістали дві стандартні деталі», через H_1 – «деталі дістали з 1-го ящика», через H_2 – «деталі дістали з 2-го ящика». Тоді, оскільки ящики однакові, то $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$.

За класичною формулою ймовірностей маємо:

$$P_{H_1}(A)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45},\ P_{H_2}(A)=\frac{C_9^2}{C_{12}^2}=\frac{6}{11}.$$

За формулою повної ймовірності (4.8)

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{28}{45}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{11}=\frac{289}{495}.$$

За формулою Байєса (4.9) знайдемо:

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{11}}{\frac{289}{495}}=\frac{135}{289}\approx 0{,}467.\ \square$$

§1.5 Послідовність незалежних випробувань.

Нехай проводять серію n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність настання події A однакова і дорівнює p, $0<p<1$. Таку ситуацію називають схемою Бернуллі. Появу події A у кожному з випробувань називають успіхом. Тоді ймовірність k успіхів в серії з n випробувань $P_n(k)$ обчислюється за формулою Бернуллі: ○

$$P_n(k)=C_n^{\,k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}, \quad (5.1)$$

●

де $q=1-p,\ q=P(\overline{A})$.

Наприклад:

П31. Митний пост дає статистичну оцінку: 20% усіх осіб, що повертаються з-за кордону, не декларують весь товар. Якщо випадково відібрали п'ять осіб, то яка ймовірність, що три з них не задекларували весь товар?

Розв'язання. Позначимо через A подію – «навмання відібрана особа не задекларувала весь товар». Тоді $p=P(A)=0{,}2$. За умовою задачі: $n=5$, $k=3$, $q=1-0{,}2=0{,}8$. За формулою (5.1) отримаємо:

$$P_5(3)=C_5^{\,3}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^2\approx 0{,}0512.$$

Щоб порівняти схему Бернуллі з урновою схемою розглянемо наступний приклад.

П32. З урни, в якій знаходяться 5 чорних і 10 білих куль послідовно дістають чотири кулі:

а) з поверненням (після кожного витягування кулі вона знову повертається в урну);

б) без повернення. Знайдіть ймовірність того, що тільки три з вийнятих кульок – білі.

Розв'язання. У випадку а) ми маємо схему Бернуллі, тому що кожне наступне виймання кулі нічим не відрізняється від попереднього: склад урни перед кожним вийманням (а це є випробування) однаковий. Отже, маємо чотири незалежних випробування, в кожному з яких ймовірність успіху – поява білої кулі – дорівнює $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$. Тому за формулою (5.1)

$$P_4(3)=C_4^{\,3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}=4\cdot\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{3}\approx 0{,}395.$$

У випадку б) маємо урнову схему. Тут послідовне виймання куль еквівалентно вийманню одразу чотирьох куль. За класичною формулою з використанням комбінаторики отримаємо:

$$P(A)=\frac{C_{10}^{\,3}\cdot C_5^{\,1}}{C_{15}^{\,4}}=\frac{40}{91}\approx 0{,}44,$$

де подія A – дістали тільки три білі кулі. □

Зауваження. ○

У другому випадку ймовірність появи білої кулі при кожному наступному вийманні відрізняється від аналогічної ймовірності при попередньому вийманні. Але, чим більша кількість куль в урні, тим менша ця різниця. Початкову кількість куль в урні називають генеральною сукупністю. Для достатньо великої генеральної сукупності урнову схему можна наближено розглядати як схему Бернуллі. ●

<u>Найімовірнішою кількістю успіхів</u> в серії з n незалежних випробувань називають число k_0, для якого ймовірність $P_n(k_0)$ є найбільшою з усіх ймовірностей

$$P_n(0),\ P_n(1),\ \ldots,\ P_n(n).$$

Зауважимо, що сума цих ймовірностей дорівнює 1, тобто

$$\sum_{k=0}^{n}P_n(k)=1. \quad (5.2)$$

Це випливає з того, що сукупність відповідних подій – кількість успіхів дорівнює k, $0\le k\le n$, – є повною групою подій.

Для знаходження k_0 використовують подвійну нерівність

$$np - q \le k_0 \le np + p. \qquad (5.3)$$

Різниця $np + p - (np - q) = p + q = 1$. Тому, якщо $np + p$ неціле число, то існує тільки одне значення для k_0, що задовольняє нерівність (5.3). Якщо $np + p$ – ціле число, то k_0 має два значення, а саме: $np + p$, і $np - q$.

Наприклад:

П33. В умовах прикладу 31 знайдіть найімовірнішу кількість осіб з 5-ти відібраних, які не задекларували весь товар, і відповідну ймовірність.

Розв'язання. Знайдемо праву і ліву сторони подвійної нерівності (5.3):

$np + p = 5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 = 1{,}2$, $np - q = 5 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Отже, $k_0 = 1$. Отже, найімовірніше з 5-ти осіб одна особа не задекларувала весь товар. Відповідна ймовірність $P_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}41$. □

При великих значеннях n і k обчислювати ймовірність $P_n(k)$ за формулою (5.1) недоцільно через громіздкість обчислень. Для цих випадків використовують наближені формули.

Формула Пуассона.

Якщо $p < 0{,}1$, n – достатньо велике, $npq \le 9$ і $\lambda = np = const$, то має місце наближена *формула Пуассона*: ○

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \bullet \qquad (5.4)$$

де $k \in [0; 1; \ldots n]$.

При цьому найімовірніша кількість успіхів k_0 дорівнює цілій частині λ, $k_0 = [\lambda]$, якщо λ – неціле. Якщо λ – ціле число, то k_0 приймає два значення: λ і $\lambda - 1$.

Зауваження. ○

Функція в правій частині формули Пуассона табульована. Складені також таблиці для сум $\sum_{k=m}^{\infty} P_n(k) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. ●

Наприклад:

П34. Робітниця прядильного цеху обслуговує 800 веретен. Імовірність обриву пряжі в кожному з веретен за проміжок часу t дорівнює 0,005. Знайдіть:

а) найімовірніше число обривів пряжі та відповідну ймовірність;

б) ймовірність того, що за час t буде більше 10 обривів.

Розв'язання.

а) обслуговування кожного веретена можна розглядати, як окреме випробування, "успіх" в якому – це обрив пряжі. Тоді маємо схему Бернуллі з $n = 800$, $p = 0{,}005$. Оскільки $npq < 9$ і $p < 0{,}1$, то використовуємо формулу Пуассона (4.5) і $\lambda = np = 800 \cdot 0{,}005 = 4$.

Найімовірніше число обривів пряжі дорівнює 4 або 3. Тоді

$$P_{800}(4) = P_{800}(3) \approx 0{,}1954.$$

б) знаходимо ймовірність того, що за час t буде більше 10 обривів:

$$P(k > 10) = \sum_{k=11}^{\infty} P_{800}(k) = \sum_{k=11}^{\infty} \frac{4^k}{k!} e^{-4} = 0{,}00284.$$

При цьому використали таблицю сум $\sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. □

Локальна та інтегральна формула Муавра – Лапласа.

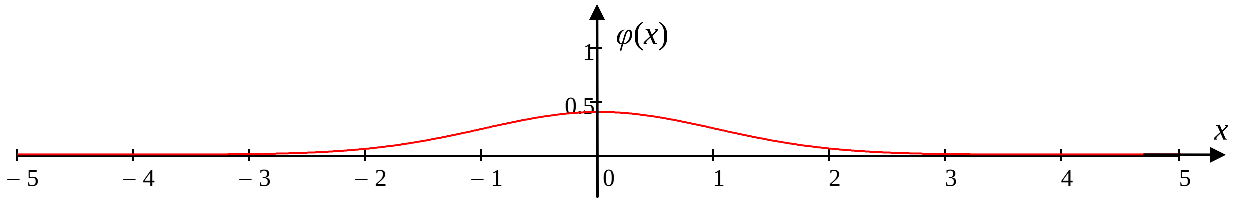
Для $0 < p < 1$ і $npq > 9$ має місце наближена *локальна формула Муавра-Лапласа*: ○

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x_k), \quad \bullet \qquad (5.5)$$

де $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\quad \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Функція $\varphi(x)$ називається функцією Гаусса. Ця функція табульована. Для успішного користування таблицею цієї функції потрібно враховувати її властивості:

1. Функція $\varphi(x)$ – парна: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$. Причому прямування до нуля здійснюється настільки швидко, що при $x \geq 4$ вважають $\varphi(x) = 0$ (див. рисунок).



При розв'язанні практичних задач часто виникає необхідність обчислювати суми виду $\sum\limits_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)$. Безпосереднє обчислення таких сум дуже громіздке. Крім того, при додаванні великої кількості наближених значень $P_n(k)$ можуть утворюватися значні похибки. Тому такі суми в умовах використання локальної формули Муавра – Лапласа обчислюють за наближеною формулою, яку називають *інтегральною формулою Муавра – Лапласа*: ○

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad \bullet \qquad (5.6)$$

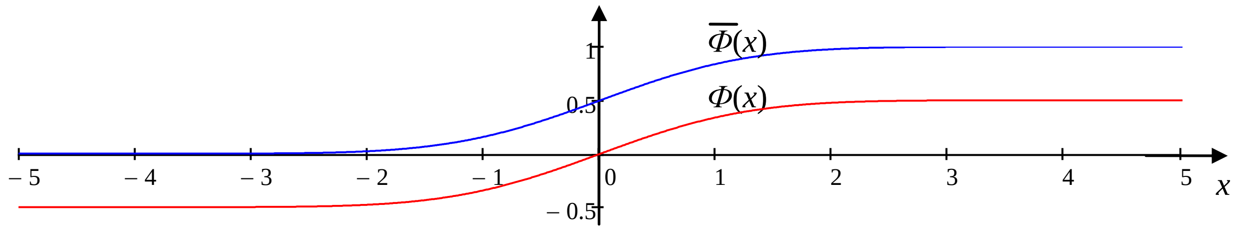
де $x_i = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $i = 1,2$; $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

Функція $\Phi(x)$ називається функцією Лапласа. Функція Лапласа $\Phi(x)$ табульована. Для успішного користування таблицею цієї функції потрібно враховувати її властивості:

1. Функція $\Phi(x)$ – непарна. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2. $\Phi(x)$ – зростаюча функція.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0{,}5$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = -0{,}5$. Причому при $x \geq 5$ вважають $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Інколи замість функції $\Phi(x)$ використовують функцію $\overline{\Phi}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$.

Властивості цієї функції легко встановити, якщо врахувати, що $\overline{\Phi}(x) = \Phi(x) + 0{,}5$.



Наприклад:

П35. За допомогою статистичних даних підраховано, що ймовірність захворіти грипом під час епідемії для кожної людини дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що з 400 осіб грипом захворіє: а) рівно 80 осіб; б) від 70 до 100 осіб?

Розв'язання. а) за умовою задачі кількість випробувань $n = 400$, $p = 0{,}2$, $k = 80$. Оскільки $p > 0{,}1$, то використовуємо локальну формулу Муавра – Лапласа (5.5). Маємо $(q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8)$:

$$x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{80-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}} = 0,\quad P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{64}}\varphi(0) = \frac{1}{8}\cdot 0{,}3989 = 0{,}04985 \approx 0{,}05.$$

Значення $\varphi(0)$ знайшли в таблиці значень функції $\varphi(x)$.

б) ймовірність того, що під час епідемії грипом захворіє кількість осіб від 70 до 100, знайдемо за інтегральною формулою Муавра – Лапласа (5.6):

$$P(70 \le k \le 100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi\left(\frac{100-80}{8}\right) - \Phi\left(\frac{70-80}{8}\right) =$$

$$= \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) == \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882 \approx 0{,}89.$$

Значення $\Phi(2{,}5)$ і $\Phi(1{,}25)$ знайшли в таблиці значень функції Лапласа. □

За допомогою функції Лапласа $\Phi(x)$ можна обчислити ймовірність відхилення відносної частоти події від ймовірності цієї події не більше, як на ε $(\varepsilon > 0)$. Нехай проведено n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може настати із ймовірністю p. Якщо $\mu(A)-$ відносна частота події A в цій серії випробувань, то має місце формула

$$P(|\,\mu(A) - p\,| \le \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (5.7)$$

Наприклад:

П36. Гральний кубик підкидають 6000 разів. Знайти ймовірність того, що відносна частота випадання п‘яти очок відрізняється від ймовірності цієї події не більше як на 0,01.

Подія A – «випадання 5 очок при одному підкиданні кубика». $p = P(A) = \frac{1}{6}$, $q = P(\overline{A}) = \frac{5}{6}$. За умовою задачі $n = 6000$, $\varepsilon = 0{,}01$. Тоді за формулою (5.7) отримаємо:

$$P\left(\left|\mu(A) - \frac{1}{6}\right| \le 0{,}01\right) \approx 2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{6000}{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right) = 2\Phi(2{,}08) = 2\cdot 0{,}481 = 0{,}962.$$

П37. Менеджер встановив, що ймовірність бути нереалізованою для кожної одиниці продукції, що швидко псується, дорівнює 0,1. Скільки потрібно реалізувати одиниць продукції, щоб із ймовірністю 0,9544 можна було стверджувати, що відносна частота події "одиниця продукції нереалізована" відхилиться від ймовірності нереалізації одиниці продукції $p = 0{,}1$ на величину не більшу ніж на 0,03.

За умовою задачі $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}03$, $P(|\,\mu(A) - p| \le 0{,}03) \approx 0{,}9544.$

Потрібно знайти n. За формулою (5.7) маємо: $2\Phi\left(0{,}03\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right) = 0{,}9544.$

Тоді $\Phi(0{,}1\cdot\sqrt{n}) = 0{,}4772.$ За таблицею значень функції Лапласа знаходимо, що $\Phi(x) = 0{,}4772$ для $x = 2.$ Тобто $0{,}1\cdot\sqrt{n} = 2.$ Звідси $n = 400$.

Отже, за умовами задачі для заданого відхилення відносної частоти від теоретичної ймовірності необхідно реалізувати не менше ніж 400 одиниць продукції. Враховуючи означення відносної частоти ($\mu(A) = \frac{m}{n}$, де $m-$ кількість одиниць нереалізованої продукції), маємо:

$$0{,}1 - 0{,}03 \le \frac{m}{400} \le 0{,}1 + 0{,}03, \qquad 28 \le m \le 52.$$

Тобто з 400 одиниць продукції з великою долею впевненості $(P = 0{,}9544)$ можна очікувати, що число одиниць нереалізованої продукції буде не менше за 28 і не більше за 52. □