Розділ 2. Випадкові величини.

§2.1 Випадкові величини та їх закони розподілу.

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини.

Випадковою величиною називають числову функцію $X(\omega)$, визначену на просторі елементарних подій Ω, пов'язаному з певним випробуванням. Надалі випадкові величини будемо позначати великими латинськими буквами – *X, Y, Z, …*. , а їх можливі значення – відповідними малими буквами – *x, y, z, …* .

Наприклад:

П38. Випробування полягає в киданні грального кубика. Простір елементарних подій є $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_6\}$ (ω_i – випадання грані з i очками). Нехай $X(\omega_i) = i$, тобто кожному елементарному результату одного кидання кубика поставимо у відповідність число очок, що випало при цьому киданні. Можливі значення цієї випадкової величини – числа

1, 2, 3, 4, 5, 6.

П39. Випробування полягає в тому, що послідовно підкидається монета доки не випаде цифра. Простір елементарних подій у цьому випадку нескінченний: $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n, ...\}$, де ω_1 = *ц*, ω_2 = *гц*, ω_3 = *ггц* і т.д. (тут *г* – випадання герба, *ц* – випадання цифри). Нехай $X(\omega_i) = i$, де i – число підкидань монети доки не випала цифра. Можливі значення цієї випадкової величини – складають нескінченну зчисленну множину

1, 2, ... , n, ...

П40. Випробування полягає у тому, що стрілець робить один постріл у круглу мішень. Простір елементарних подій Ω – це множина всіх точок площини мішені. Нехай $X(\omega)$ – відстань від центра мішені до точки ω. Можливі значення цієї випадкової величини – всі невід'ємні числа, що не перевищують r, де r – радіус мішені. Очевидно вони складають нескінченну незчисленну множину. □

Випадкова величина називається дискретною, якщо вона приймає окремі, ізольовані одне від одного значення.

Множина значень дискретної випадкової величини може бути як скінченною так і нескінченною. В останньому випадку множина має бути такою, щоб її значення можна було пронумерувати натуральними числами 1, 2, 3, …. (зчисленна множина). В прикладах 38 і 39 маємо дискретні випадкові величини.

Неперервною називають випадкову величину, яка приймає всі значення з деякого скінченного чи нескінченного проміжку.

У прикладі 40 маємо неперервну випадкову величину.

Для задання випадкової величини недостатньо знати тільки її можливі значення. Необхідно також знати ймовірності появи цих значень. Тобто для задання випадкової величини має бути встановлено співвідношення, що пов'язує її значення та відповідні ймовірності. Це співвідношення називають законом розподілу випадкової величини.

Для дискретної випадкової величини однією з форм закону розподілу є ряд розподілу.

Рядом розподілу дискретної випадкової величини називається таблиця із двох рядків, перший з яких містить всі можливі значення випадкової величини у зростаючому порядку, а в другий – відповідні ймовірності, з якими випадкова величина набуває цих значень:

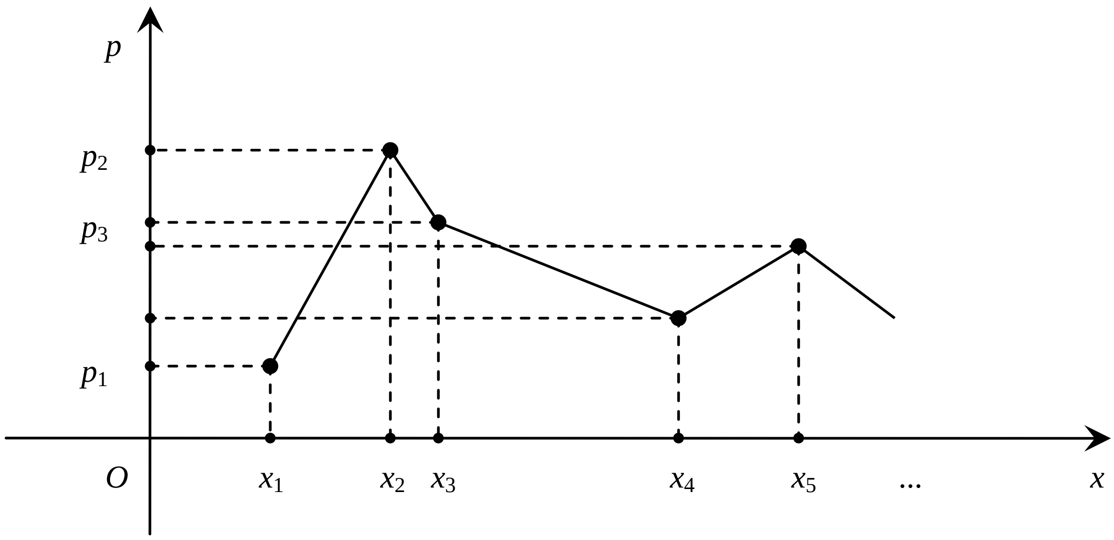
x	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

де p_i – ймовірність події «випадкова величина X набула значення x_i»: $p_i = P(X = x_i)$.

Для ряду розподілу справедлива наступна рівність, яку називають умовою нормування:

$$\sum_i p_i = 1. \tag{1.1}$$

Многокутником розподілу називається ламана, яка з'єднує точки із координатами $(x_i\,,\ p_i)$:



Зазвичай масштаб по осях Ox і Op береться різний.

Наведемо приклад побудови ряду розподілу випадкової величини.

Наприклад:

П41. Експерт з банківського кредитування наголосив, що протягом місяця фірма A ліквідує свою заборгованість з ймовірністю 0,8; фірма $B-$ з ймовірністю 0,9; а фірма $C-$ 0,75. Складемо ряд розподілу випадкової величини $X-$ кількості фірм, які ліквідують заборгованість протягом місяця. Знайдемо ймовірність того, що заборгованість ліквідують більше однієї фірми.

Величина X набуває значень: 0, 1, 2, 3. Знайдемо відповідні ймовірності.
Нехай $X=0$ (жодна фірма не ліквідує заборгованість). За теоремою добутку ймовірностей маємо:

$$P(X=0)=0{,}2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}25=0{,}005.$$

Нехай $X=1$ (тільки одна фірма ліквідує заборгованість). За теоремами суми і добутку ймовірностей отримаємо

$$P(X=1)=0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}25+0{,}2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}25+0{,}2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}75=0{,}02+0{,}045+0{,}015=0{,}08.$$

Нехай $X=2$ означає, що рівно дві фірми ліквідують заборгованість. Аналогічно попередньому знаходимо

$$P(X=2)=0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}25+0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}75+0{,}2\cdot 0{,}9\cdot 0{,}75=0{,}18+0{,}06+0{,}135=0{,}375.$$

Нарешті, $P(X=3)=0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}75=0{,}54.$

Таким чином, ряд розподілу має вигляд

X	0	1	2	3
p_i	0,005	0,08	0,375	0,54

Перевіримо умову нормування (1.1): $0{,}005+0{,}08+0{,}375+0{,}54=1.$

Знайдемо тепер відповідь на друге запитання задачі: $P(X>1).$ Подія «$X>1$» складається з двох подій «$X=2$» і «$X=3$», які є несумісними.

Тому $P(\{X=2\}+\{X=3\})=P(X=2)+P(X=3)=0{,}375+0{,}54=0{,}915.$ □

Розподіл випадкової величини не завжди може бути поданий у вигляді ряду розподілу. Це неможливо зробити для неперервної випадкової величини, множина значень якої є незчисленною. Таку випадкову величину можна охарактеризувати ймовірностями попадання її значень в певний інтервал. Цей підхід ми розглянемо пізніше.

Виявляється, що універсальний підхід до опису дискретних і неперервних випадкових величин можна здійснити, визначивши ймовірності подій виду $X<x$ (випадкова величина X в результаті випробування набуде значення меншого ніж задане число x) для довільних значень x.

Функцією розподілу випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка визначає ймовірність події $X < x$:

$$F(x) = P(X < x). \tag{1.2}$$

Для дискретної випадкової величини X функція розподілу знаходиться за формулою

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i, \tag{1.3}$$

тобто значення функції в точці x дорівнює сумі ймовірностей значень випадкової величини, які менші за x.

Властивості функції розподілу $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ – неспадна функція.
3. $F(x)$ – неперервна зліва.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Наслідок 1. ○

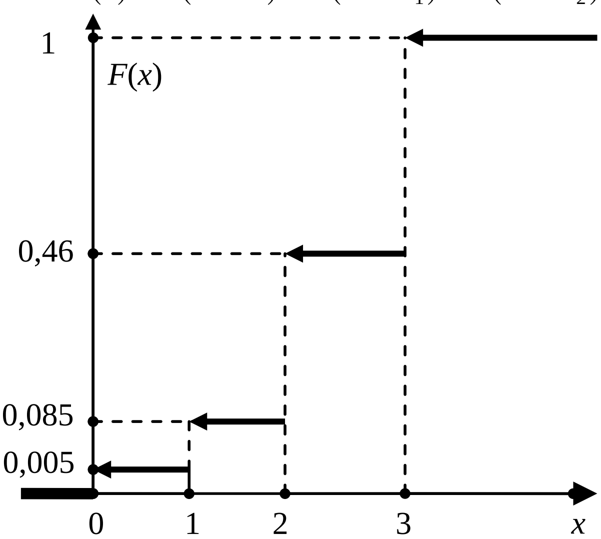
Імовірність того, що випадкова величина набуде значення з проміжку $[a;b)$ дорівнює приросту функції розподілу $F(x)$ на цьому проміжку:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \bullet \tag{1.4}$$

Наприклад:

П42. Знайдемо функцію розподілу випадкової величини X з прикладу 41 і побудуємо її графік.

Якщо $x \le x_1$, то подія є неможливою, тому її ймовірність дорівнює нулю: $F(x) = 0$. Коли $x_1 < x \le x_2$, то подія $X < x$ співпадає з подією $X = x_1$, тому $F(x) = p_1$. Якщо $x_2 < x \le x_3$ маємо $F(x) = P(X < x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = p_1 + p_2$. Аналогічно отримаємо значення функції розподілу при $x_3 < x \le x_4$: $F(x) = p_1 + p_2 + p_3$. Якщо $x > x_4$ подія $X < x$ є вірогідною подією, тому $F(x) = 1$. Таким чином маємо відповідь:



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}005, & 0 < x \le 1; \\ 0{,}085, & 1 < x \le 2; \\ 0{,}46, & 2 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

□

Зауваження.

Для дискретної випадкової величини графік інтегральної функції розподілу має східчастий вигляд.

Навпаки, якщо для дискретної випадкової величини X відома функція розподілу $F(x)$, то можна скласти ряд розподілу за таким правилом. Значення випадкової величини x_i є точками розриву функції розподілу, а відповідні ймовірності дорівнюють „стрибку” значення $F(x)$ в цій точці розриву.

Наприклад:

П43. Скласти ряд розподілу випадкової величини X, якщо задана її функція розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ 0{,}1, & -3<x\le 0;\\ 0{,}25, & 0<x\le 2;\\ 0{,}65, & 2<x\le 5;\\ 0{,}80, & 5<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Розв'язання. Перший рядок ряду розподілу буде складатися з точок розриву функції $F(x)$: $x_1=-3$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=5$, $x_5=6$. Відповідні ймовірності знаходяться за формулою $P(x_i)=F(x_{i+1})-F(x_i)$.

Отримаємо ряд розподілу

x_i	-3	0	2	5	6
p_i	0,1	0,15	0,40	0,15	0,20

□

Якщо для функції розподілу неперервної випадкової величини X існує обмежена похідна

$$p(x)=F'(x), \tag{1.5}$$

то функцію $p(x)$ називають <u>щільністю розподілу ймовірностей</u> випадкової величини X.

Якщо відома щільність ймовірностей, то функцію розподілу можна знайти за формулою

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt. \tag{1.6}$$

Властивості функції щільності розподілу ймовірностей $p(x)$:

1. $p(x)\ge 0$.
2. $p(x)$ – нормована до одиниці $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx=1$.

Теорема 1. ○

Імовірність того, що випадкова величина набуде значення з проміжку $[a;b)$ дорівнює інтегралу щільності розподілу ймовірностей в межах від a до b:

$$P(a\le X<b)=F(b)-F(a)=\int_a^b p(x)dx. \bullet \tag{1.7}$$

Геометричне тлумачення: ймовірність випадкової події $a\le X<b$ дорівнює площі криволінійної трапеції, яка обмежена графіком функції $p(x)$, віссю Ox і прямими $x=a$, $x=b$.

З формули (1.6) випливає, що функція розподілу $F(x)$ для неперервної випадкової величини X неперервна. Звідси, імовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде одне певне значення, дорівнює нулю

$$P(X=x)=\lim_{\Delta x\to 0}(F(x+\Delta x)-F(x))=0. \tag{1.8}$$

Таким чином, формула (1.7) для неперервних випадкових величин має місце для будь-яких нерівностей (строгих чи нестрогих) у лівій стороні формули.

Наприклад:

П44. Функція розподілу визначена формулою

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ ax+b, & 1<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Знайдемо значення сталих a і b, щільність розподілу $p(x)$ і $P(2<X<5)$. Побудуємо графіки функцій $F(x)$ і $p(x)$.

З неперервності функції $F(x)$ маємо, що з одного боку $F(1+0)=F(1)=0$, однак $F(1+0)=a\cdot 1+b=a+b$. З іншого боку $F(6)=F(6+0)=1$, однак $F(6)=a\cdot 6+b=6a+b$.

Маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}a+b=0;\\ 6a+b=1.\end{cases}\qquad \text{Звідси } a=\frac{1}{5},\ b=-\frac{1}{5}.$$

Таким чином $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{x-1}{5}, & 1<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$

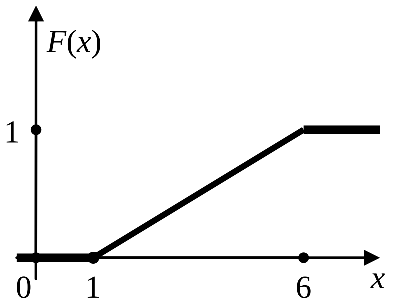
Тоді щільність розподілу даної випадкової величини матиме вигляд

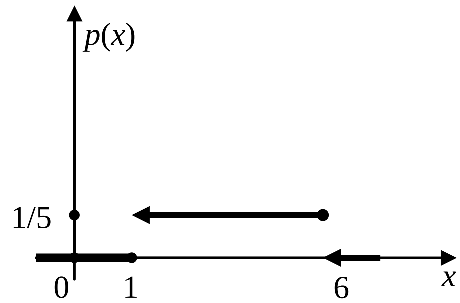
$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{1}{5}, & 1<x\le 6;\\ 0, & x>6.\end{cases}$$

Ймовірність $P(2<X<5)$ можна знайти за формулою (1.4) або за формулою (1.7). Використовуючи (1.4), знаходимо

$$P(2<X<5)=F(5)-F(2)=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

Графіки функцій $F(x)$ і $p(x)$ мають вигляд:





П45. Закон розподілу випадкової величини X заданий щільністю розподілу

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ a\sqrt{x+2}, & -2<x\le 7;\\ 0, & x>7.\end{cases}$$

Знайдіть значення сталої a і функцію розподілу $F(x)$.

Сталу a визначаємо з умови нормування (властивість 2 щільності розподілу)

$$\int_{-2}^{7} a\sqrt{x+2}\,dx=1.$$

Обчислимо інтеграл в лівій частині рівності

$$\int_{-2}^{7} a\sqrt{x+2}\,dx=a\int_{-2}^{7}(x+2)^{1/2}\,dx=a\frac{(x+2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{-2}^{7}=\frac{2a}{3}\left((7+2)^{3/2}-(-2+2)^{3/2}\right)=\frac{2a}{3}\cdot 9^{3/2}=18a.$$

Таким чином, $18=1$. Звідси $a=\frac{1}{18}$.

Отже,

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \frac{\sqrt{x+2}}{18}, & -2<x\le 7;\\ 0, & x>7.\end{cases}$$

Визначимо функцію розподілу $F(x)$. При $x\le -2$ $F(x)=0$, при $x>7$ $F(x)=1$. Нехай $-2<x\le 7$. Тоді за формулою (1.6)

$$F(x)=\int_{-2}^{x}\frac{1}{18}\sqrt{t+2}\,dt=\frac{1}{18}\cdot\frac{(t+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-2}^{x}=\frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}.$$

Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}, & -2<x\le 7;\\ 1, & x>7.\end{cases}$$

□

Функцію щільності розподілу можна використати для опису також дискретних і змішаних випадкових величин, якщо скористатися апаратом узагальнених функцій.

Позначимо

$$\sigma_0(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$$

функцію Хевісайда. Розглянемо функцію $\frac{1}{\alpha}(\sigma_0(x)-\sigma_0(x-\alpha))$ і перейдемо в цьому виразі до границі при $\alpha\to 0$. Отримаємо функцію, яку позначають $\delta(x)$ і називають дельта-функція Дірака. Ця функція має наступні властивості:

1. $\delta(x)=\begin{cases}0, & x\ne 0,\\ +\infty, & x=0.\end{cases}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1$.

Можна також показати, що $\frac{d\sigma_0(x)}{dx}=\delta(x)$.

Наприклад:

П46. Ймовірнісний розподіл невипадкової сталої величини $X=C$ можна охарактеризувати так: $p(x)=\delta(x-C)$.

П47. Найпростіша випадкова величина X має розподіл, який називають розподілом бінарної альтернативи. Ряд розподілу для цієї випадкової величини має вигляд:

x_i	x_1	x_2
p_i	α	$1-\alpha$

В термінах дельта-функції щільність розподілу величини X запишеться так:

$$p(x)=\alpha\cdot\delta(x-x_1)+(1-\alpha)\cdot\delta(x-x_2).$$

П48. Нехай випадкова величина Y, щільність розподілу якої

$$p(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}y^2, & |y|\le 1,\\ 0, & |y|>1\end{cases}$$

або в термінах функції Хевісайда

$$p(y)=\frac{3}{2}y^2\cdot(\sigma_0(y+1)-\sigma_0(y-1)).$$

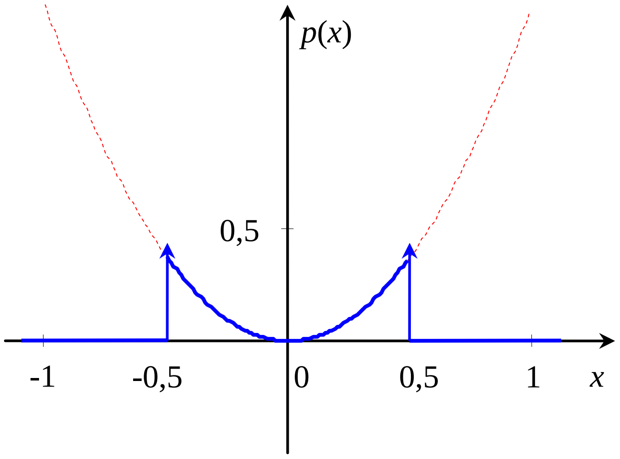
піддана дії обмежувача, що діє за алгоритмом $X=\begin{cases}-1/2, & Y\le -1/2,\\ Y, & -1/2<Y<1/2,\\ 1/2, & Y\ge 1/2.\end{cases}$

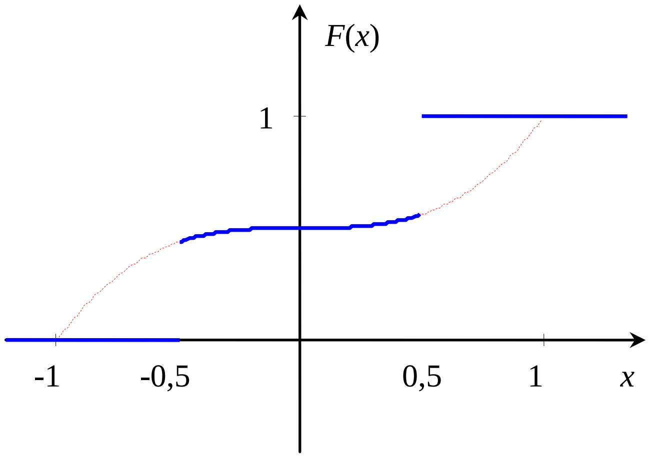
Щільність розподілу змішаної випадкової величини X запишеться так

$$p(x)=\frac{3}{2}x^2\cdot(\sigma_0(x+1/2)-\sigma_0(x-1/2))+\frac{7}{16}\delta(x+1/2)+\frac{7}{16}\delta(x-1/2).$$

А функція розподілу має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1/2,\\ \dfrac{x^3}{2}+\dfrac{1}{2}, & -1/2<x\le 1/2,\\ 1, & x>1/2.\end{cases}$$





□

З метою спрощення деяких обчислень для опису випадкових величин іноді використовують також <u>характеристичну функцію</u>. Вона являє собою перетворення Фур'є від щільності розподілу ймовірностей

$$\Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)e^{-i\omega x}dx.$$

При цьому за формулою обертання

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

Характеристична функція дійсної випадкової величини неперервна по ω та має наступні властивості

$$|\Phi(\omega)|\le\Phi(0)=1.$$

Таким чином для повного опису випадкової величини можна рівноправно використовувати функцію розподілу ймовірностей, щільність розподілу ймовірностей та характеристичну функцію.