§ 2.3. Деякі класичні розподіли випадкових величин

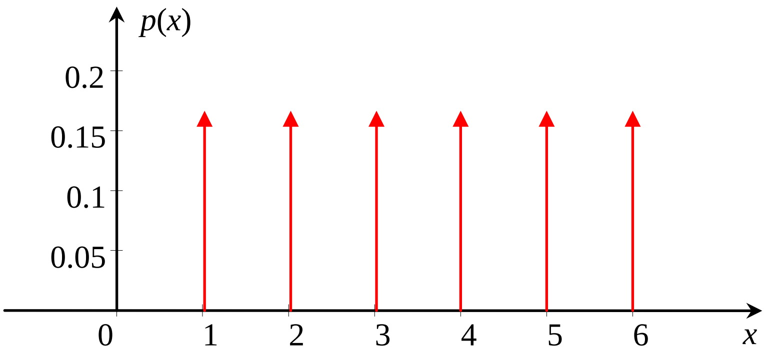
Наведемо деякі конкретні закони розподілу дискретних випадкових величин, які досить часто зустрічаються на практиці.

1. Дискретна рівномірно розподілена випадкова величина набуває n значень з однаковими ймовірностями. Згідно з умовою нормування (1.1) $p_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Наприклад:

П52. Прикладом рівномірно розподіленої величини є кількість очок, що випадає при одному киданні грального кубика.

x	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



□

2. Випадкова величина називається біноміально розподіленою, якщо вона набуває значення $0, 1, ..., n$ з ймовірностями, які обчислюються за формулою Бернуллі

$$p_k = P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad p - \text{ параметр розподілу.}$$

За формулою бінома Ньютона маємо

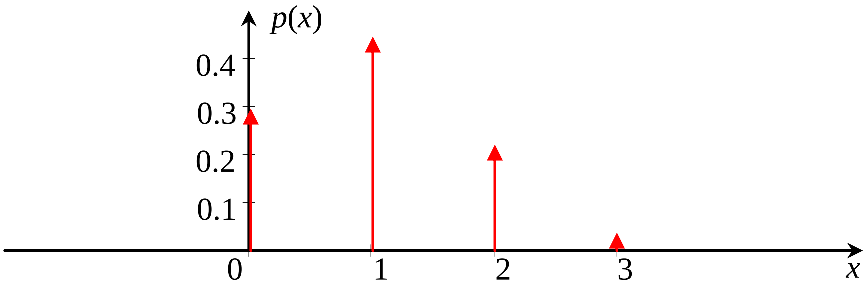
$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Такий розподіл має, наприклад, випадкова величина $X -$ кількість появ події A в n незалежних однакових випробуваннях, якщо ймовірність появи A в одному випробуванні дорівнює p.

Наприклад:

П53. Нехай $p = \frac{1}{3}$, $n = 3$. Отримаємо розподіл

x	0	1	2	3
p_i	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$



□

3. Випадкова величина X має <u>розподіл Пуассона</u>, якщо вона набуває значення $0, 1, 2, ..., k, ...$ із ймовірностями p_k, які обчислюються за формулою Пуассона

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda - \text{ параметр розподілу.}$$

Виконання умови нормування (1.1) випливає з формули розкладання в ряд функції e^{λ}.

4. Випадкова величина X має <u>геометричний розподіл</u>, якщо вона приймає значення $1, 2, ..., k, ...$ ймовірності яких обчислюються за формулою

$$p_k = P(X = k) = p \cdot q^{k-1}, \; k = 1, 2, ..., \quad p - \text{ параметр розподілу, } q = 1 - p.$$

Умова нормування (1.1) перевіряється з використанням формули суми нескінченної спадної геометричної прогресії.

Можливий також випадок, коли перше значення є 0. Тоді $p_k = p \cdot q^k$, $k = 0, 1, 2, ...$.

Наприклад:

П54. В урні знаходяться 5 білих і 7 чорних куль. Випробування полягає у вийманні по одній кульці з поверненням. Розглянемо дві випадкові величини: X – кількість вийнятих чорних куль до першої появи білої кулі, Y – кількість виймань, які закінчуються з першою появою білої кулі.

Складемо ряди розподілу для цих випадкових величин.

Знайдемо ймовірність p появи білої кульки при одному вийманні. За класичною формулою матимемо $p = \frac{5}{12}$. Тоді $q = 1 - p = \frac{7}{12}$.

Випадкова величина X набуде значення 0, якщо біла кулька з'явилася при першому вийманні. Тому $p_0 = P(X = 0) = p = \frac{5}{12}$.

$X = 1$, якщо при 1-му вийманні з'явилася чорна кулька, а при 2-му – біла. Тому $p_1 = P(X = 1) = q \cdot p$.

Аналогічно знаходимо $p_2 = P(X = 2) = q^2 p$, і т.д.

Маємо ряд розподілу для X

X	0	1	2	…	k	…
p_i	p	qp	$q^2 p$	…	$q^k p$	…

де $p = \frac{5}{12}$, $q = \frac{7}{12}$.

Випадкова величина Y набуває найменше значення 1, якщо при першому вийманні з'явилася біла кулька, бо з її появою процес виймання припиняється. $P(Y = 1) = p = \frac{5}{12}$.

Ряд розподілу для випадкової величини Y буде наступним

Y	1	2	…	k	…
p_i	p	qp	…	$q^{k-1} p$	…

де $p = \frac{5}{12}$, $q = \frac{7}{12}$. □

5. <u>Гіпергеометричний закон розподілу</u> має випадкова величина X, якщо вона набуває послідовні невід'ємні цілі значення, а відповідні ймовірності знаходяться за формулою

$$P(X = k) = \frac{C_N^k \cdot C_M^{m-k}}{C_{N+M}^m}, \quad m \le N + M.$$

де K, m, N, M – невід'ємні цілі числа.

Наприклад:

П55. В ящику міститься 10 однотипних деталей, з яких 3 браковані. Навмання виймають 4 деталі. Випадкова величина X – число стандартних деталей серед чотирьох вийнятих. Складемо ряд розподілу для X.

Очевидно, випадкова величина X набуває значення: 1, 2, 3, 4. Маємо урнову схему. Тому за класичною формулою:

$$P(X=1)=\frac{C_7^1\cdot C_3^3}{C_{10}^4}=\frac{7}{210}=\frac{1}{30},\qquad P(X=2)=\frac{C_7^2\cdot C_3^2}{C_{10}^4}=\frac{63}{210}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=3)=\frac{C_7^3\cdot C_3^1}{C_{10}^4}=\frac{105}{210}=\frac{1}{2},\qquad P(X=4)=\frac{C_7^4\cdot C_3^0}{C_{10}^4}=\frac{1}{6}.$$

Маємо ряд розподілу для X:

X	1	2	3	4
p_k	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Перевіримо умову нормування (1.1)

$$\frac{1}{30}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1+9+15+5}{30}=1.\ \square$$

Подамо у вигляді таблиці залежності основних числових характеристик дискретних розподілів від параметрів цих розподілів.

№ п/п	Розподіл	$M(X)$	$D(X)$
1.	Рівномірний: $p_k=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
2.	Біноміальний: $p_k=C_n^k p^k\cdot q^{n-k}$	np	npq
3.	Пуассонівський: $p_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda=np$	λ	λ
4.	Геометричний: $p_k=P(X=k)=pq^{k-1}$, $k=1,2,...$;	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
	$p_k=P(X=k)=pq^k$, $k=0,1,2,....$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$

Наприклад:

П56. На перший курс ВНЗ зараховано 1000 студентів. Ймовірність того, що студент буде відрахований за перший рік навчання дорівнює 0,004. Визначити числові характеристики випадкової величини X – кількість відрахованих студентів за перший рік навчання.

Випадкова величина X має пуассонівський закон розподілу, бо $n=1000$ – достатньо велике число, $p=0{,}004$, $npq<9$. Тому

$$M(X)=\lambda=np=1000\cdot 0{,}004=4,$$

$$D(X)=\lambda=4,\quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=2.$$

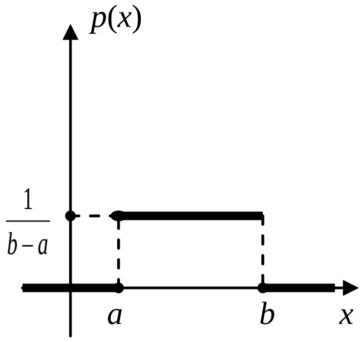
Таким чином, середнє значення кількості відрахованих студентів дорівнює 4. Можливі відхилення від середнього значення з точки зору теорії ймовірностей – 2 студента. □

Розглянемо тепер декілька основних неперервних розподілів.

6. Неперервна випадкова величина X, що визначена на проміжку $[a,b]$, має <u>рівномірний закон розподілу</u>, якщо її щільність визначається формулою

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \frac{1}{b-a}, & a<x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Графік щільності розподілу має вигляд



Очевидно, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{b-a} = 1$, тобто умова нормування виконується.

Основні числові характеристики рівномірно розподіленої випадкової величини $X \in [a;b]$ дорівнюють:

$$M(X) = M_e(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. <u>Показниковим (експоненціальним) законом розподілу</u> випадкової величини X називають закон, який визначається щільністю розподілу

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

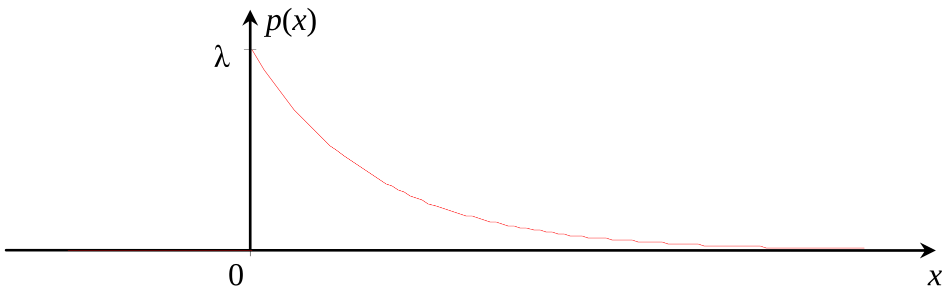
або функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

де λ – параметр розподілу, $\lambda > 0$.

Легко перевірити, що для показникового розподілу також виконується умова нормування.

Графік щільності цього розподілу має вигляд



Основні числові характеристики для показникового розподілу з параметром λ дорівнюють:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad M_e(X) = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Наприклад:

П57. Випадкова величина X має функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-5x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

Визначимо $M(X)$, $\sigma(X)$, $M_e(X)$.

Оскільки X має показниковий розподіл із параметром $\lambda = 5$, то маємо $M(X) = \frac{1}{5} = 0{,}2$; $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}2$; $M_e(X) = \frac{1}{5}\ln 2$. □

3. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty<x<\infty.$$

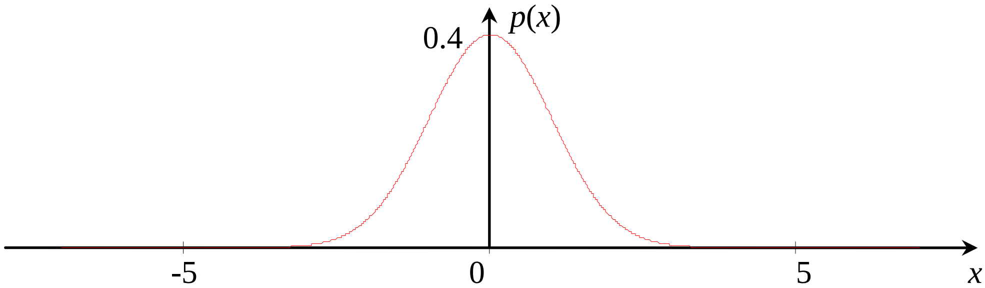
Числа a і σ – параметри розподілу.

Якщо $a=0$ і $\sigma=1$, то нормальний закон називають нормованим нормальним. В цьому випадку

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad -\infty<x<\infty,$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Обидві функції табульовані і були розглянуті в § 1.5 розділу 1.



Нормальний закон з параметрами a і σ позначають: $N(a;\sigma)$. Наприклад, $X\sim N(-1;3)$ означає, що випадкова величина X має нормальний розподіл з параметрами $a=-1$, $\sigma=3$, тобто її щільність розподілу визначається за формулою

$$p(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{18}}.$$

Розглянемо числові характеристики нормально розподіленої випадкової величини.

Нормальний закон розподілу є симетричним. Якщо $X\sim N(a;\sigma)$, то

$$M(X)=M_0(X)=M_e(X)=a.$$

Дисперсія нормально розподіленої випадкової величини X

$$D(X)=\sigma^2.$$

Середньоквадратичне відхилення $\sigma(X)=\sigma$.

Отже, для нормального розподілу параметр a є середнім значенням (математичним сподіванням) випадкової величини X, а σ – середньоквадратичне відхилення X. Асиметрія і ексцес нормально розподіленої величини $\gamma_3(X)=\gamma_4(X)=0$.

Для нормально розподіленої випадкової величини X справедливі наступні формули:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (3.1)$$

$$P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (3.2)$$

Наприклад:

П58. Статистичні дані доходу на душу населення показали, що річний дохід X працівників банку має нормальний розподіл з середнім значенням $a=9800$ грн. і середньоквадратичним відхиленням $\sigma=1600$ грн., тобто $X\sim N(9800;1600)$. Якщо навмання вибрано певну особу, то яка ймовірність того, що її річний прибуток: а) більш ніж 8000 грн.; б) знаходиться в межах між 8520 та 12200грн.; в) відхиляється від середнього значення не більше, як на 500грн.

а) скористаємося формулою (3.1) і тим, що $\Phi(\infty)=0,5$. Тоді

$$P(X>8000)=P(8000<X<\infty)=0,5-\Phi\left(\frac{8000-9800}{1600}\right)=0,5+\Phi(1,125)=0,5+0,3686=0,8686.$$

б) скористаємося формулою (3.1)

$$P(8520<X<12200)=\Phi\left(\frac{12200-9800}{1600}\right)-\Phi\left(\frac{8520-9800}{1600}\right)=$$

$$=\Phi(1,5)+\Phi(0,8)=0,4332+0,2881=0,7213.$$

в) за формулою (3.2)

$$P(|X-9800|<500)=2\Phi\left(\frac{500}{1600}\right)=2\Phi(0,31)=2\cdot 0,1217=0,2434.$$

При розв’язанні задачі використана таблиця функції Лапласа. □

З формули (3.2) випливає *“правило трьох σ ”*. А саме:

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)=0,9973.$$

Тобто ймовірність того, що значення нормально розподіленої випадкової величини X відхиляються від середнього значення a менше, ніж на 3σ, приблизно дорівнює одиниці. Про таку подію говорять, що вона практично вірогідна. І навпаки, подія, яка полягає в тому, що значення нормально розподіленої величини відрізняються від її середнього значення a більше, ніж на 3σ, є практично неможливою (ймовірність такої події дорівнює 0,0027).