Ряд Тейлора. Розкладання елементарних функцій у степеневі ряди

Ряд Тейлора

Нехай функція $f(x)$ у інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ зображується у вигляді суми степеневого ряду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

Сума степеневого ряду в інтервалі збіжності має похідні всіх порядків, тому існує похідна $f'(x)$, причому

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} , \ \forall x \in (x_0 - R; x_0 + R) .$$

Аналогічно знайдемо другу похідну

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} , \ \forall x \in (x_0 - R; x_0 + R) ,$$

третю

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (x - x_0)^{n-3} , \ \forall x \in (x_0 - R; x_0 + R) ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k} , \ \forall x \in (x_0 - R; x_0 + R) ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Підставимо в ці рівності $x = x_0$, при цьому всі доданки, окрім першого, в кожному рядку перетворяться на 0. Звідси отримаємо

$$f(x_0) = a_0 , \ f'(x_0) = 1 \cdot a_1 = 1! \cdot a_1 , \ f''(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 2! \cdot a_2 , \ f'''(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 = 3! \cdot a_3 , \ \ldots$$

$$\ldots, \ f^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1) a_n = n! \cdot a_n , \ \ldots$$

Звідси

$$a_0 = f(x_0) , \ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} , \ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} , \ a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!} , \ \ldots, \ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} , \ \ldots$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в степеневий ряд $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, отримаємо

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

або в розгорнутому вигляді

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \ .$$

Цей ряд називають <u>рядом Тейлора</u> функції $f(x)$. Таким чином ми довели твердження.

Теорема. ○

Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ зображується у вигляді суми степеневого ряду $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора цієї функції. ●

Звідси також очевидно, що необхідною умовою того, що функція $f(x)$ зображується у вигляді ряду Тейлора, є існування всіх похідних цієї функції.

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора набуває вигляду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots \ .$$

Цей ряд називають рядом Маклорена.

Розкладання в степеневий ряд елементарних функцій

1. Нехай $f(x)=e^x$. Маємо, що

$$f^{(n)}(x)=e^x \ (n=1,2,...), \text{ тоді } f^{(n)}(0)=e^0=1 \ (n=1,2,...).$$

Тоді

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \ .$$

Знайдемо область збіжності цього ряду.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Отже радіус збіжності цього ряду $R=\frac{1}{\rho}=\infty$. Тому інтервал збіжності $(-\infty;+\infty)$.

2. $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots, \quad x\in R.$

3. $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \quad x\in R.$

4. $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots, \quad |x|<1.$

5. $arctg\, x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots, \quad |x|<1.$

6. $(1+x)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n=$

$$=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots, \quad |x|<1.$$

П р и к л а д 1. Розкласти по степенях x функції:

а) $f(x)=\ln(1+3x)$; б) $f(x)=\sqrt[3]{8+7x}$.

Розв'язання.

а) $f(x)=\ln(1+3x)$. Нехай $t=3x$. Використаємо формулу 4.

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}+\ldots, |t|<1.$$

Підставимо $t=3x$. Отже,

$$\ln(1+3x)=3x-\frac{(3x)^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(3x)^n}{n}+\ldots=$$

$$=3x-\frac{3^2x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{3^nx^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^nx^n}{n}.$$

Ряд збіжний, якщо $|3x|<1 \Leftrightarrow -1<3x<1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$, тобто $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

б) $f(x)=\sqrt[3]{8+7x}$. Запишемо: $f(x)=2\cdot\sqrt[3]{1+\frac{7}{8}x}=2\left(1+\frac{7}{8}x\right)^{\frac{1}{3}}$.

Так як $(1+t)^m=1+mt+\frac{m(m-1)}{2!}t^2+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m-n+1)}{n!}t^n+\ldots, |t|<1$, то підставивши $m=\frac{1}{3},\ t=\frac{7}{8}x$ отримаємо:

$$\left(1+\frac{7}{8}x\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{7}{8}\right)^2x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{7}{8}\right)^3x^3+$$

$$+\ldots+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{7}{8}\right)^nx^n+\ldots=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}x-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!}\left(\frac{7}{8}\right)^2x^2+$$

$$+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}\left(\frac{7}{8}\right)^3x^3+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots(3n-4)}{3^n\cdot n!}\left(\frac{7}{8}\right)^nx^n+\ldots=$$

$$=1+\frac{7}{24}x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots(3n-4)\cdot 7^n}{3^n\cdot n!\cdot 8^n}x^n.$$

$$\left|\frac{7}{8}x\right|<1\Rightarrow-\frac{8}{7}<x<\frac{8}{7},\text{ тобто } x\in\left(-\frac{8}{7};\frac{8}{7}\right).$$

Тому розклад заданої функції в степеневий ряд має вид:

$$\sqrt[3]{8+7x}=2+\frac{7}{12}x+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots(3n-4)\cdot 7^n}{3^n\cdot n!\cdot 8^n}x^n,\ \ x\in\left(-\frac{8}{7};\frac{8}{7}\right).$$

Інтегрування функцій за допомогою степеневих рядів

Наближене обчислення визначених інтегралів виконується у такому порядку:

1) підінтегральна функція розкладається в степеневий ряд;

2) отриманий степеневий ряд почленно інтегрується;

3) наближено обчислюється сума степеневого ряду.

При цьому необхідно щоб межі інтегрування знаходились в області збіжності степеневого ряду.

П р и к л а д 2. Обчислити

$$\int_0^1\cos x^2dx$$

з точністю 0,001.

Розв'язання.

Розкладемо підінтегральну функцію в степеневий ряд. Для цього скористаємося розкладом функції $\cos x$ в степеневий ряд:

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ \ x\in(-\infty;+\infty).$$

Отримаємо

$$\cos x^2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+\ldots.$$

Почленно інтегруємо даний ряд:

$$\int_0^1\cos x^2dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\int_0^1x^{4n}dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\cdot\left.\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right|_0^1=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\cdot\frac{1}{4n+1}=1-\frac{1}{2!\cdot 5}+\frac{1}{4!\cdot 9}-\frac{1}{6!\cdot 13}+\cdots.$$

Отриманий ряд задовольняє умовам теореми Лейбніца. Тому для забезпечення точності обчислення беремо всі ті члени, абсолютна величина яких перевищує задану точність:

$$u_1=1,\ u_2=\frac{1}{2!\cdot 5}=0.1,\ u_3=\frac{1}{4!\cdot 9}\approx 0{,}00463,\ u_4=\frac{1}{6!\cdot 13}\approx 0{,}00011<0{,}001.$$

Для знаходження інтеграла з точністю до 0,001 візьмемо перші три члени:

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \approx 1 - 0{,}1 + 0{,}0046 \approx 0{,}9046 \cdot$$

Розв'язування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

Розглянемо задачу Коші для рівняння $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ з початковими умовами $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0{}'$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Наближений розв'язок диференціального рівняння записуємо у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots.$$

В цьому розкладі перші n коефіцієнтів відомі з початкових умов, наступні коефіцієнти, починаючи з $y^{(n)}(x_0)$ знаходяться послідовним диференціюванням заданого рівняння, або методом порівняння коефіцієнтів.

П р и к л а д 3. Знайти перші три відмінні від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння

$$y' = 2\cos x - xy^2,$$

що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$.

Розв'язання.

Розв'язок рівняння шукатимемо у вигляді ряду Маклорена, взявши з нього три перші члени:

$$y(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2.$$

Якщо хоча б один із коефіцієнтів рівний нулю, то будемо шукати наступні члени.

Коефіцієнт $f(0) = y(0) = 1$ заданий в умові задачі.

$f'(0) = y'(0) = 2\cos 0 - 0 \cdot 1^2 = 2$.

Далі будемо диференціювати рівняння $y' = 2\cos x - xy^2$:

$y'' = -2\sin x - y^2 - 2xyy' \Rightarrow f''(0) = y''(0) = -2\sin 0 - 1^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 = -1$.

Підставивши коефіцієнти в рівність

$$y(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2,$$

остаточно дістанемо

$$y(x) = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{(-1)}{2!}x^2 \Rightarrow y(x) = 1 + 2x - \frac{x^2}{2!}.$$