Вступ до математичного аналізу

Елементи математичної логіки

Основними об’єктами математичної логіки є висловлювання.

Висловлюванням називають будь-яке речення про яке можна однозначно сказати істинне воно чи хибне.

Наприклад:

П.1. Висловлювання A: «Число 9 ділиться націло на число 3» – істинне висловлювання.

П.2. Висловлювання B: «Земля – друга від Сонця планета Сонячної системи» – хибне висловлювання.

Висловлювання позначають великими латинськими буквами: A, B, C, … .

Крім висловлювань до основних об’єктів математичної логіки відносяться дві константи: логічний нуль – 0, та логічна одиниця – 1.

Логічний нуль позначають також F (від слова false – хибно, фальш), а логічну одиницю – Т (від слова true – істина, правда).

В цих позначеннях можна записати: $A = 1$, $B = 0$.

Над цими об’єктами визначено три **основні операції**.

1. Заперечення. Унарна операція (має один аргумент). В українській мові заперечення висловлювання A читається як «не A». Заперечення A позначають $\overline{A}$ або $\neg A$. Правило знаходження заперечення для заданого аргументу A визначається таблицею істинності

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

2. Кон’юнкція. Бінарна операція (має два аргументи). Позначають $A \wedge B$ або $A \& B$. В українській мові читається як «A і B». Таблиця істинності для кон’юнкції має вигляд.

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Диз’юнкція. Бінарна операція. Позначають $A \vee B$. В українській мові читається як «A або B». Таблиця істинності для диз’юнкції має вигляд.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Використовуючи основні операції будують інші. Розглянемо деякі з них.

4. Імплікація. Бінарна операція. Позначають $A \Rightarrow B$. Читають «з A слідує B» або «якщо A, то B».

За означенням: $A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5. Еквіваленція. Бінарна операція. Позначають $A \Leftrightarrow B$. Читають «A тоді і тільки тоді, коли B» або «для того щоб A необхідно і достатньо, щоб B».

За означенням: $A \Leftrightarrow B \equiv (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6. <u>Альтернативна диз'юнкція</u> (додавання по модулю два). Позначають $A \oplus B$. Читають «тільки одне з двох, *A* або *B*».

За означенням: $A \oplus B \equiv (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$.

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

7. Штрих Шеффера. Позначають $A \mid B$.

За означенням: $A \mid B \equiv \overline{A \wedge B}$.

A	B	$A \mid B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

8. Стрілка Пірса. Позначають $A \downarrow B$.

За означенням: $A \downarrow B \equiv \overline{A \vee B}$.

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Основні тотожності (аксіоми та властивості).

1.	$A \vee B = B \vee A$	$A \wedge B = B \wedge A$	Комутативність
2.	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$	Асоціативність
3.	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Дистрибутивність
4.	$A \vee \overline{A} = 1$	$A \wedge \overline{A} = 0$	Комплементність
5.	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$	$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$	Закони де Моргана
6.	$A \vee (A \wedge B) = A$	$A \wedge (A \vee B) = A$	Закони поглинання
7.	$A \vee (\overline{A} \wedge B) = A \vee B$	$A \wedge (\overline{A} \vee B) = A \wedge B$	Блейка-Порецького
8.	$A \vee A = A$	$A \wedge A = A$	Ідемпотентність
9.	$\overline{\overline{A}} = A$		Інволютивність заперечення
10.	$A \vee 0 = A$ $A \vee 1 = 1$ $\overline{0} = 1$	$A \wedge 1 = A$ $A \wedge 0 = 0$ $\overline{1} = 0$	Властивості констант
11.	$(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) = B$	$(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) = B$	Склеювання
12.	$A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$		Закон контрапозиції

В математичні логіці використовують два спеціальні символи, які називають <u>кванторами</u>:

1. $\forall$ – квантор загальності. Читають «для будь-якого», «для довільного».
2. $\exists$ – квантор існування. Читають «існує», «знайдеться».

Використовують також символ $\exists!$ – «існує єдиний».

Речення, яке залежить від n змінних (кожна з яких може набувати значень з певної множини) та перетворюється на висловлювання при підстановці в нього замість змінних деяких фіксованих значень називається n-арним предикатом.

Множина з якої дозволено вибирати значення змінних називається областю визначення предиката. Множина значень змінних, при яких предикат являється істинним висловлюванням називається областю істиності.

Наприклад:

П1. $a \in Z$ (множина цілих чисел): $a \vdots 3$.

Це унарний предикат, область визначення якого – множина цілих чисел. Область істинності цього предиката є множина чисел виду $a = 3k,\ \ k \in Z$.

При підстановці, наприклад, $a = 12$ предикат перетворюється на істинне висловлювання, а при підстановці $a = 7$ – на хибне.

П2. $a, b \in R$ (множина дійсних чисел): $a < b$.

Це бінарний предикат, область визначення якого – множина дійсних чисел.

При підстановці, наприклад, $a = 3{,}5$ і $b = 7{,}8$ предикат перетворюється на істинне висловлювання, а при підстановці $a = 5{,}62$ і $b = 2{,}3$ – на хибне.

Якщо змінна в предикаті знаходиться під знаком квантора (на змінну навішено квантор), то вона називається зв'язаною. Навішування квантора на змінну зменшує арність предиката на одиницю. Якщо на всі змінні навішено квантори, то предикат являється 0-арним або висловлюванням.

Наприклад:

П1. $\forall a \in R\ \ \exists b \in R:\ b > a$. Це 0-арний предикат, істинне висловлювання.

П2. $\forall a\ \ \forall b\ \ \forall c$, $a, b, c \in$множина прямих звичайного простору: $a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$.

Це істинне висловлювання.

П3. $\bar{a} \in R^n\ \ \forall \bar{b} \in R^n:\ \bar{a} \perp \bar{b}$. Унарний предикат, областю істинності якого є нуль-вектор.

Елементи теорії множин

Множина – первісне не означуване поняття, яке роз'яснюється на прикладах. Однак можна дати опис поняття множини, наприклад у формулюванні Бертрана Рассела: «Множина є сукупність різних елементів, яка мислиться як одне ціле». Можливе також опосередковане означення через аксіоми теорії множин.

Наприклад:

П1. Множина всіх міст України.

П2. Множина студентів, що навчаються у даній групі.

П3. $N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ – множина всіх натуральних чисел.

П4. $Z = \{..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ – множина всіх цілих чисел.

П5. $Q = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in Z, q \in N \right\}$ – множина всіх раціональних чисел. Запис читають так: множина всіх дробів виду $\frac{p}{q}$, таких що чисельник p належить множині цілих чисел, а знаменник q – множині натуральних чисел.

Об'єкти, з яких складається множина, називають елементами множини. Той факт, що об'єкт a є елементом множини A позначають так: $a \in A$. Якщо b не належить множині A, то пишуть $b \notin A$.

Фігурними дужками позначають перелік елементів множини. Вертикальною рискою відокремлюють характеристичну властивість, яка визначає дану множину.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою множиною і позначається $\varnothing$.

Наприклад:

П1. Множина всіх дійсних коренів рівняння $x^2 + 2 = 0$ є порожньою множиною.

Якщо кожен елемент множини A є одночасно елементом множини B, то кажуть що A <u>підмножина</u> B (A міститься в B), і записують $A \subset B$ або $B \supset A$.

Тобто $A \subset B \equiv \forall x \in A : x \in B$.

Наприклад:

П1. $N \subset Z \subset Q$.

Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, то кажуть, що множини A і B <u>рівні</u>, і записують $A = B$.

Тобто $A = B \equiv (A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

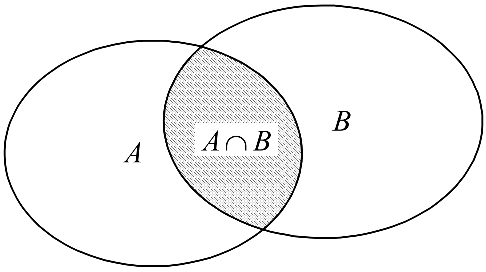
Порожня множина за означенням є підмножиною будь-якої множини.

Тобто $\forall A : \varnothing \subset A$.

Порожню множину та саму множину A називають <u>невласними підмножинами</u> множини A, а всі інші підмножини – власними.

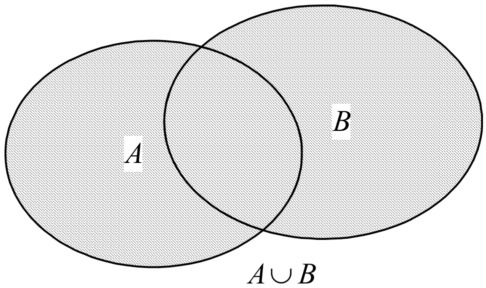
Операції над множинами.

1. <u>Переріз</u> множин. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.



Множина, яка складається з усіх спільних елементів множин A і B.

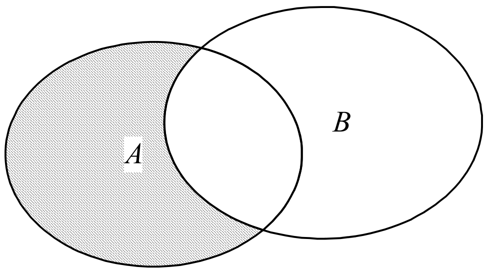
2. <u>Об'єднання</u> множин. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.



$A \cup B$

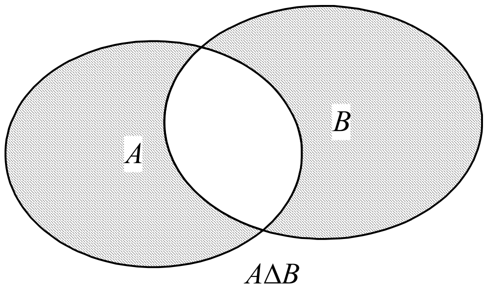
Множина, що складається з усіх елементів множин A і B.

3. <u>Різниця</u> множин. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.



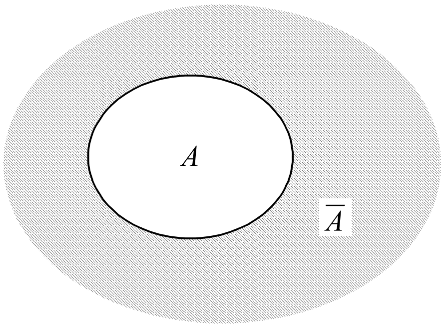
$A \setminus B$

4. <u>Симетрична різниця</u>. $A \Delta B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\} = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.



$A \Delta B$

5. Доповнення. $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$.



Передбачається, що існує деякий універсум – множина U, яка містить множину A.

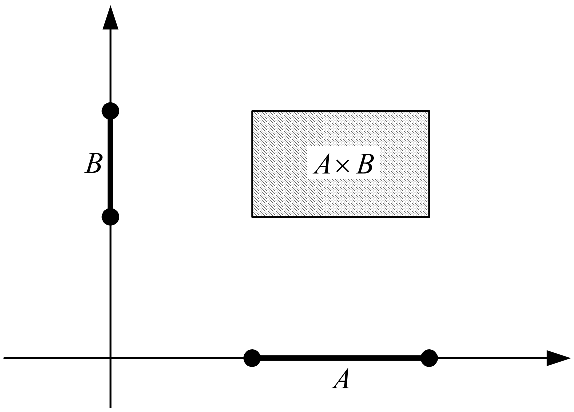
Ілюстрації наведені вище для роз'яснення операцій над множинами називають діаграмами Ейлера-Венна.

6. Декартів прямий добуток. $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Множина всіх можливих пар елементів, перший з яких взято з множини A, а другий з множини B.

Наприклад:

П1.



П2. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, тоді

$$A \times B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (1,8), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,2), (3,4), (3,6), (3,8)\}.$$

7. Потужність множини. Позначають $|A|$. Результатом виконання цієї операції є кардинальне число. Для скінченних множин кардинальне число дорівнює кількості елементів цієї множини.

Наприклад:

П1. Кардинальне число множини $\{1, 3, 6\}$ дорівнює 3.

П2. Кардинальне число множини шахових фігур дорівнює 32.

Множини, які мають однакове кардинальне число називають рівнопотужними.

Наприклад:

П1. Множина натуральних чисел, множина цілих чисел, множина раціональних чисел нескінченні, але рівнопотужні. Множини рівнопотужні з множиною натуральних чисел називають зчисленними, а їх кардинальне число позначають $\aleph_0$.

П2. Множина дійсних чисел і множина точок прямої нескінченні і рівнопотужні, але мають потужність більшу ніж $\aleph_0$. Про множини рівнопотужні до множини дійсних чисел кажуть, що вони мають потужність континуум. Цю потужність позначають c.

8. Множина всіх підмножин (булеан). $2^A = \{M \mid M \subset A\}$. Для скінченних множин $|2^A| = 2^{|A|}$.

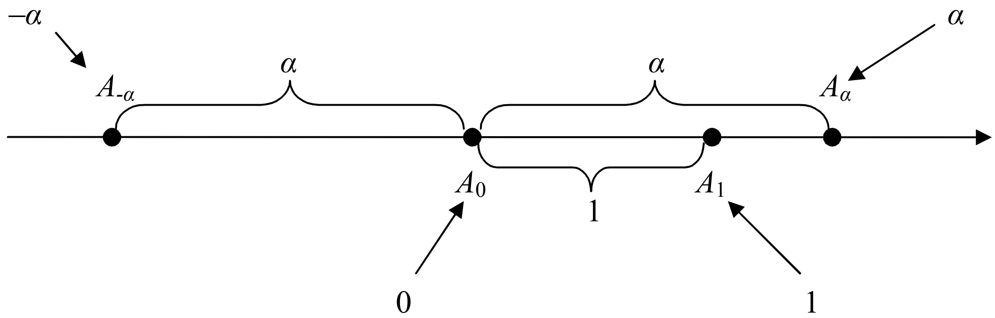
Наприклад:

П1. $A = \{1, 2, 3\}$, $2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Множина дійсних чисел

Множину дійсних чисел позначають R.

Між множиною дійсних чисел та точками прямої можна встановити взаємно однозначну відповідність.



Тому терміни «дійсне число» та «точка числової прямої» будемо використовувати як синоніми.

Можна показати, що не всі точки прямої відповідають раціональним числам.

Наприклад:

Діагональ квадрата зі стороною 1 має довжину $\sqrt{2}$. Число $\sqrt{2}$ не являється раціональним числом. Припустимо протилежне. Нехай $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ – нескоротний дріб => $\frac{p^2}{q^2} = 2$ => $q^2 = \frac{p^2}{2} \in N$ => $p^2 \vdots 2$ => $p = 2k$ => $\frac{p^2}{q^2} = \frac{4k^2}{q^2} = 2$ => $q^2 = 2k^2$ => $q = 2m$. Отже $\frac{p}{q} = \frac{2k}{2m}$ – скорочується на 2, що суперечить припущенню.

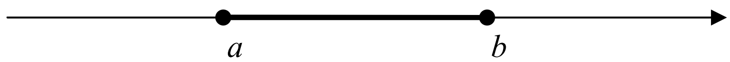
Числа прямої, що не є раціональними називаються <u>ірраціональними числами</u>. Множина всіх ірраціональних чисел позначається I.

Таким чином, множина дійсних чисел є об'єднанням множини раціональних чисел та множини ірраціональних чисел.

Тобто $R = Q \cup I$.

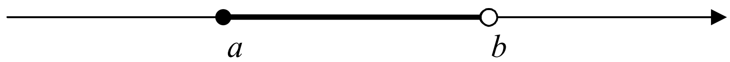
Деякі підмножини множини дійсних чисел.

$[a; b]$ – відрізок

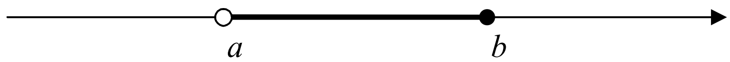


$(a; b)$ – інтервал

$[a; b)$ – пів-відрізок

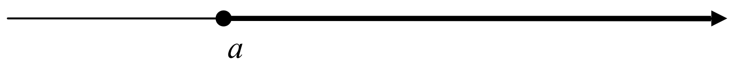


$(a; b]$ – пів-інтервал

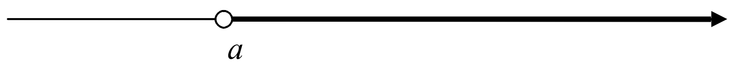


Нескінченні проміжки.

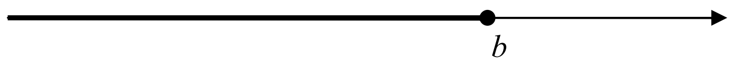
$[a; +\infty)$



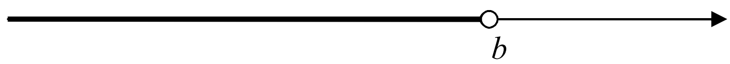
$(a; +\infty)$



$(-\infty; b]$



$(-\infty; b)$



Непорожня множина дійсних чисел E називається обмеженою зверху (знизу), якщо існує дійсне число α таке, що для всіх $x \in E$ правильна рівність $x \le \alpha$ ($x \ge \alpha$).

Число α при цьому називається верхньою (нижньою) межею множини E.

Найменша з верхніх меж множини E називається точною верхньою межею або верхньою гранню цієї множини, і позначається $\sup E$.

Найбільша з нижніх меж множини E називається точною нижньою межею або нижньою гранню цієї множини, і позначається $\inf E$.

Наприклад:

П1. Якщо $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$, то $\sup A = 1$, $\inf A = 0$.

П2. Якщо $B = [a; b)$, то $\sup A = b$, $\inf A = a$.

Теорема.

У будь-якої непорожньої обмеженої зверху (знизу) множини дійсних чисел існує верхня (нижня) грань.

(Без доведення.)

Найбільший з елементів множини A називають максимумом цієї множини і позначають $\max A$, а найменший – мінімумом і позначають $\min A$.

Для множин із попереднього прикладу маємо

Наприклад:

П1. $\max A = 1$, $\min A$ не існує.

П2. $\max B$ не існує, $\min B = a$.

Модуль дійсного числа.

Модулем дійсного числа називається відстань від цього числа до початку відліку – числа 0.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Властивості:

$$|x| \ge 0,\ |x| = |-x|,\ x \le |x|,\ -x \le |x|,$$

$$||x| - |y|| \le |x + y| \le |x| + |y|,\ |xy| = |x||y|,\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Рівносильні нерівності. Нехай $\alpha > 0$. Тоді

$|x| < \alpha \iff -\alpha < x < \alpha$,

$|x| \le \alpha \iff -\alpha \le x \le \alpha$,

$|x - x_0| < \alpha \iff x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$,

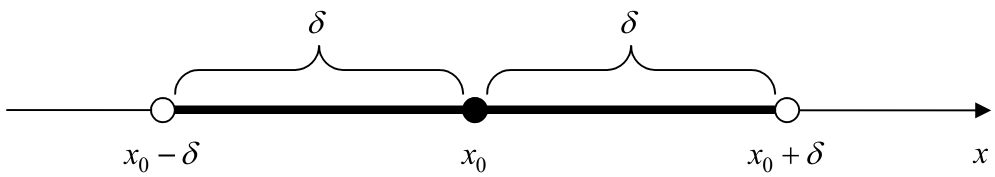
$|x - x_0| \le \alpha \iff x_0 - \alpha \le x \le x_0 + \alpha$.

Окіл числа. Гранична точка множини.

Околом або δ-околом (дельта-околом) точки x_0 називають інтервал

$$(x_0 - \delta; x_0 + \delta),$$

де $\delta > 0$.



Будемо позначати δ - окіл точки x_0 символом $S(x_0, \delta)$.

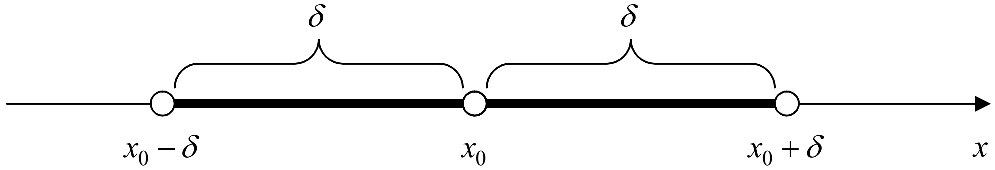
За допомогою нерівності δ - окіл можна записати так:

$$S(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}.$$

Виколотим або проколотим δ - околом точки x_0 називають множину

$$(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta),$$

де $\delta > 0$. Тобто виколотий окіл – це окіл, з якого вилучена сама точка x_0.



Будемо позначати виколотий δ - окіл точки x_0 символом $S^*(x_0, \delta)$.

За допомогою нерівностей виколотий δ - окіл можна записати так:

$$S^*(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

Окіл точки x_0 називають досить малим, якщо число δ досить велике.

Околом плюс нескінченно віддаленої точки називають інтервал $(M; +\infty)$, де $M > 0$.

Цей окіл називають досить малим, якщо число M досить велике.

Околом мінус нескінченно віддаленої точки називають інтервал $(-\infty; -M)$, де $M > 0$.

Цей окіл називають досить малим, якщо число M досить велике.

Число x_0 називають граничною точкою множини D, якщо будь-який окіл точки x_0 містить нескінченну кількість елементів множини D.

Наприклад:

П1. Граничними точками інтервалу $(a; b)$ є всі точки цього інтервалу та точки a і b.

П2. Граничними точками відрізка $[a; b]$ є всі точки цього відрізка.

П3. Граничною точкою множини $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$ є точка 0.

П4. Єдиною граничною точкою множини натуральних чисел є плюс нескінченно віддалена точка.

Множина, яка містить в собі всі свої граничні точки називається замкненою.

Наприклад:

П1. Відрізок $[a; b]$ є замкненою множиною.

П2. Вся числова вісь $(-\infty; +\infty)$ є замкненою множиною.

Точка x_0 називається внутрішньою точкою множини D, якщо існує окіл цієї точки, який повністю міститься в множині D.

Наприклад:

П1. Точка x_0 є внутрішньою точкою будь-якого свого околу $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Множина, яка складається виключно з внутрішніх точок називається відкритою.

Наприклад:

П1. Інтервал $(a; b)$ є відкритою множиною.

П2. Вся числова вісь $(-\infty; +\infty)$ є відкритою множиною.