Множина комплексних чисел

Поняття комплексного числа. Арифметична форма комплексного числа.

Розглянемо множину пар дійсних чисел (a,b) (тобто декартів квадрат множини дійсних чисел $R \times R$). Введемо на цій множині операції додавання за правилом

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

та множення за правилом

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Множину всіх таких пар $z=(a,b)$, $a,b \in R$ з вказаними правилами виконання операцій додавання і множення називають <u>множиною комплексних чисел</u> і позначають C.

Властивості операцій додавання і множення комплексних чисел:

1. $z_1+z_2=z_2+z_1$.	Комутативність додавання
2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.	Асоціативність додавання
3. $(0,0)+z=z$.	Властивість нуля
4. $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$.	Властивість протилежного елемента
5. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$	Комутативність множення
6. $(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$	Асоціативність множення
7. $z_1 \cdot (z_2+z_3)=z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$	Дистрибутивність
8. $(1,0)\cdot z = z$	Властивість одиниці

Можна помітити, що пари виду $(a,0)$ при додаванні і множенні поводять себе як дійсні числа:

$$(a,0)+(c,0)=(a+c,0+0)=(a+c,0),$$
$$(a,0)\cdot(c,0)=(a\cdot c-0\cdot 0, a\cdot 0+0\cdot c)=(a\cdot c,0).$$

Тому надалі комплексне число виду $(a,0)$ будемо ототожнювати з дійсним числом a, отже позначимо

$$(a,0)=a,\ \ a \in R.$$

Звідси випливає, що множина дійсних чисел є підмножиною множини комплексних чисел.

Позначимо також комплексне число $(0,1)$ символом i, отже

$$(0,1)=i.$$

Тоді будь-яке комплексне число виду $(0,b)$ можна подати у вигляді

$$(0,b)=(b,0)\cdot(0,1)=bi.$$

Оскільки $(a,b)=(a,0)+(0,b)$, то маємо

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)=a+bi.$$

Цей запис називають <u>алгебраїчною формою комплексного числа</u>. При цьому пишуть $\mathrm{Re}(a+bi)=a$ – дійсна частина комплексного числа, $\mathrm{Im}(a+bi)=b$ – його уявна частина.

За правилом множення комплексних чисел маємо

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Ця рівність виражає <u>головну властивість символу</u> i.

Таким чином додавання і множення комплексних чисел в алгебраїчній формі здійснюється за правилами додавання і множення многочленів відносно символу i з урахуванням умови $i^2=-1$.

Наприклад:

П1. $(3+4i)(2+5i)=3\cdot 2+3\cdot 5i+4i\cdot 2+4i\cdot 5i=$

$\quad =6+15i+8i+20i^2=6+23i-20=-14+23i$.

П2. $-3i\cdot(7+i)=-3i\cdot 7-3i\cdot i=-21i-3i^2=-21i-3\cdot(-1)=3-21i$.

П3. $(3+2i)\cdot(3-2i)=3\cdot 3+3\cdot(-2i)+2i\cdot 3+2i\cdot(-2i)=$

$\quad =9-6i+6i-4i^2=9-4\cdot(-1)=9+4=13$.

Комплексні числа $z = a + bi$ та $\bar{z} = a - bi$, що відрізняються лише знаком уявної частини, називають комплексно спряженими. Добуток комплексно спряжених чисел є дійсним числом (див П3). Цей факт дозволяє виконувати ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі, домножуючи чисельник і знаменник дробу на спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i .$$

Основна теорема алгебри.

Розширення множини дійсних чисел і введення до розгляду множини комплексних чисел виправдано наступним фактом.

Основна теорема алгебри. ○

Будь-який многочлен

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

з комплексними коефіцієнтами a_1, a_2, …, a_n має принаймні один корінь на множині комплексних чисел при $n \geq 1$. ●

Наслідок. ○

Всякий многочлен $P_n(z)$ має рівно n коренів в C з урахуванням їх кратності. ●

Це означає, що многочлен розкладається в добуток лінійних множників:

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) .$$

Комплексні числа z_1, z_2, …, z_n є коренями многочлена $P_n(z)$, деякі з них можуть співпадати. Якщо z_k зустрічається рівно r_k раз, то записують

$$P_n(z) = (z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2}\ldots(z - z_n)^{r_n} ,$$

де числа r_1, r_2, …, r_n називаються кратностями коренів z_k ($k = 1,2,\ldots,n$). Даний розклад для кожного многочлена визначається однозначно з точністю до нумерації коренів.

Наприклад:

П1. $z^3 + (8+i)z^2 + (41+16i)z + 40 + 73i = (z + 2 + 3i)^2 (z + 4 - 5i)$.

П2. $z^4 - (2+2i)z^3 + 4iz^2 + (2-2i)z - 1 = (z-1)^2 (z-i)^2$.

П3. $z^2 - 4z + 13$.

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36;$$

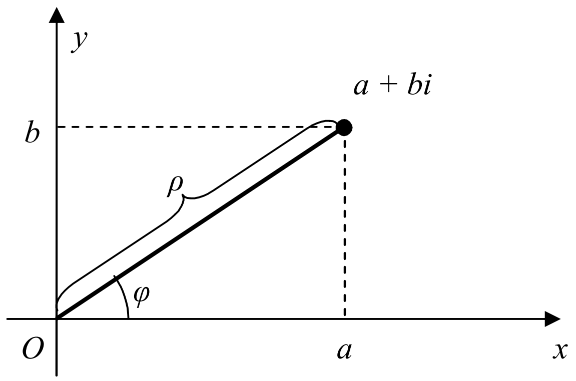
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i;$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i;$$

$$z^2 - 4z + 13 = (z - 2 + 3i)(z - 2 - 3i) .$$

П4. $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$.

Геометричне тлумачення комплексного числа.



Кожному числу $z = a + bi$ ставлять у відповідність точку $M(a;b)$ на декартовій площині xOy або її радіус-вектор $\overline{OM}$. Вісь Ox називають дійсною віссю, вісь Oy – уявною віссю, площину xOy – комплексною площиною і точку цієї площини ототожнюють з комплексним числом.

Перейдемо в комплексній площині до полярної системи координат з початком в точці O та полярною віссю напрямленою вздовж Ox $(0 \le \rho \le +\infty, -\infty \le \varphi \le +\infty)$, при цьому декартові координати точки a і b будуть пов'язані з полярними ρ і φ за допомогою формул

$$\begin{cases} a = \rho\cos\varphi; \\ b = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Враховуючи ці формули комплексне число можна записати у вигляді

$$z = a + bi = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Цей запис називається <u>тригонометричною формою комплексного числа</u>.

Число ρ називають модулем комплексного числа і позначають $|z|$, а φ – аргументом комплексного числа і позначають $\varphi = \arg z$.

Для $z \ne 0$ виконуються рівності

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Аргумент визначається неоднозначно: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in Z$, де $\arg z$ – головне значення аргументу числа z; $-\pi < \arg z \le \pi$.

Теорема. ○

При множенні комплексних чисел z_1 і z_2 їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються:

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

2) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$. ●

Наслідок. ○

1) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; 2) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$. ●

Формула Муавра:

$$z^n = (\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \ n \in N.$$

Наприклад:

П1. $(1+i)^5$ – ?

$$z = 1 + i; \ \rho = |1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \ \varphi = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}; \ z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$(1+i)^5 = z^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 - 4i.$$

Експоненціальна форма комплексного числа.

Справедлива *формула Ейлера*:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Враховуючи дане співвідношення запис комплексного числа можна подати у вигляді

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Цей запис називають експоненціальною формою комплексного числа.

В експоненціальній формі зручно виконувати множення, ділення та піднесення комплексних чисел до степеня:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}; \ z^n = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n e^{in\varphi}.$$